This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06261567 3

a Mr. Lequeux de la part de l'auteur

TRAITÉ

DE

GÉODÉSIE.

DE L'IMPRIMERIE DE Mme Ve COURCIER.

Geodesy - Systematic works 1800 ff

TRAITÉ
DE GÉODÉSIE,

OU

EXPOSITION
DES MÉTHODES TRIGONOMÉTRIQUES
ET ASTRONOMIQUES,

APPLICABLES SOIT A LA MESURE DE LA TERRE, SOIT A LA CONFECTION DES CANEVAS DES CARTES ET DES PLANS TOPOGRAPHIQUES;

PAR L. PUISSANT,

Chevalier de l'Ordre royal et militaire de Saint-Louis, Officier supérieur au Corps royal des Ingénieurs-Géographes, etc.

DEUXIÈME ÉDITION.

TOME PREMIER.

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

PARIS,

Mme Ve COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES SCIENCES,

RUE DU JARDINET-SAINT-ANDRÉ-DES-ARCS.

1819.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

A M. DE LAPLACE,

PAIR DE FRANCE,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, etc.

MONSIEUR LE MARQUIS,

AVANT qu'on établît au Dépôt de la Guerre, une École spéciale de Géodésie et de Topographie, j'avais pensé qu'un ouvrage où la Science géodésique serait mise à l'usage des Ingénieurs-Géographes, ne pourrait manquer d'être utile; c'est ce qui m'engagea à publier la première édition de ce Traité. Depuis, les évènemens ont favorisé les pro-

grès de cette science, le Gouvernement lui a porté un intérêt toujours croissant, les secours qu'elle offre à la Géographie ont été mieux reconnus; et c'est pour profiter de ces avantages, que revenant aujourd'hui sur mon premier essai, j'ai cru devoir envisager la Géodésie sous un point de vue plus général.

Mon travail se rattache à ces hautes questions relatives à la figure de la Terre, sur lesquelles votre génie s'est exercé avec un si étonnant succès. Si je n'ai pu entrer dans toutes les considérations profondes qu'elles me présentaient, j'ai tâché du moins d'embrasser tout ce qui a rapport aux grandes opérations géodésiques, afin qu'on pût en comparer les résultats avec les formules nouvelles dont vous venez d'enrichir encore la Science.

Cet Ouvrage étant destiné à compléter l'instruction des Élèves de l'École Polytechnique qui sont admis à l'École d'Application des Ingénieurs-Géographes, j'ai fait tous mes efforts pour qu'il atteignît ce but. J'ai été soutenu constamment par le désir et l'espoir d'en rendre l'hommage digne de vous.

L. PUISSANT.

AVANT-PROPOS.

La Topographie d'un grand État, fondée sur des procédés trigonométriques et astronomiques, remonte à l'époque où l'illustre Cassini conçut et exécuta le vaste projet d'une Carte de la France; et cette œuvre, qui mérite encore à beaucoup de titres, l'estime dont elle jouit généralement, a servi pendant long-tems de modèle aux autres nations. Mais l'opération à jamais mémorable, exécutée de nos jours par deux de nos Astronomes célèbres, pour la détermination de l'unité fondamentale de notre système des poids et mesures, a donné lieu à de nouvelles méthodes d'observation et de calcul qui ont fait changer de face à la science géodésique, et influé même sur les progrès de la Topographie. Cette heureuse révolution, suite naturelle de l'invention du cercle répétiteur de Borda et des travaux de M. Delambre, s'est étendue sur toute l'Europe savante, et pénètre déjà dans les autres parties du monde civilisé.

Quoique dans l'espace de plus de vingt ans, le corps des Ingénieurs-Géographes militaires ait recueilli, dans les pays qui se trouvaient sous la domination française, une masse considérable d'élémens géodésiques, et formé une des plus intéressantes collections de Cartes topographiques qui existent, cependant le Dépôt de la Guerre, pour accroître ses richesses en ce genre, méditait le projet d'une nouvelle description

géométrique et topographique du Royaume, ayant pour fondement la méridienne de Dunkerque. Il avait, dans ce but, signalé plusieurs fois à l'autorité supérieure les imperfections de la Carte de Cassini, et fait commencer, sous les auspices du Bureau des Longitudes, quelques opérations préliminaires sur la perpendiculaire de Brest à Strasbourg, ainsi que sur le parallèle qui devait lier le Mont-Blanc à la Méridienne, et nous faire connaître la véritable position géographique de cette haute sommité des Alpes. Mais il était réservé à M. le Marquis de Laplace de fixer définitivement l'attention du Gouvernement sur cet objet, de donner à la Géodésie un degré d'intérêt qu'elle n'avait pas encore reçu. Ainsi, grâce à l'influence de ce savant illustre, l'on possédera dans peu d'années une nouvelle Carte de la France, utile à tous les services publics, et dont l'exécution répondra aux progrès des lumières du siècle.

Le désir bien naturel de profiter d'une circonstance aussi favorable pour propager les meilleures doctrines géodésiques parmi de jeunes officiers appelés à coopérer à la grande triangulation du royaume, dont les résultats répandront sans doute de nouvelles lumières sur la question délicate de la figure de la Terre, m'a fait naître l'idée de refondre en entier mon Traité de Géodésie, afin d'en mieux coordonner toutes les parties, et de le rendre plus méthodique et plus complet.

Mes travaux géodésiques et mes leçons à l'École d'Application des Ingénieurs-Géographes, m'ont mis à même de faire un grand nombre d'observations utiles, d'approfondir

divers points importans de la science, et de remplir avec plus de facilité que je n'aurais pu le faire sans cela, le cadre assez étendu que je me suis tracé. Néanmoins l'exposition du Système du Monde, la Mécanique céleste, les ouvrages de M. Delambre, les Mémoires de M. Legendre sur plusieurs questions de haute Géodésie, ceux de M. Poisson sur la théorie du pendule composé, m'ont procuré les matériaux les plus précieux, et m'ont singulièrement aidé à réunir en corps de doctrine, et sous un point de vue nouveau, tout ce qui constitue la partie essentielle de la science de l'Ingénieur-Géographe, ou doit faire la base d'un Cadastre général.

L'analyse étant généralement cultivée, je n'ai pas hésité à en faire exclusivement usage dans ce Traité; mais j'ai toujours tâché de l'appliquer avec simplicité et élégance, et de lui éviter le reproche qu'elle s'attire quelquefois de prendre les choses de trop haut. Enfin pour guider le calculateur qui pourrait n'être pas familiarisé avec l'emploi des logarithmes et l'application des formules algébriques, ou qui aurait perdu de vue la théorie, je me suis principalement attaché à présenter avec clarté les types de toutes les opérations les plus importantes et les plus usuelles, et d'abréger les calculs à l'aide d'un grand nombre de Tables.

Cet Ouvrage est divisé en six livres. Le premier, qui renferme des notions de la sphère et du mouvement des corps célestes, sert d'introduction aux livres suivans.

Le second livre rappelle les principes généraux de la résolution des triangles rectilignes et sphériques, et fait con-

naître les moyens de substituer, dans quelques cas particuliers, aux formules rigoureuses, des séries à l'aide desquelles on parvient aisément à rendre les résultats numériques plus exacts et plus indépendans de l'erreur des tables de logarithmes.

Le troisième livre concerne les opérations et les calculs géodésiques; c'est-à-dire la mesure des angles et des bases, les calculs des distances, des latitudes, longitudes et azimuts des points fondamentaux d'une Carte, des différences de niveau, des surfaces.

Le quatrième et le cinquième livre sont consacrés à l'exposition des méthodes et des calculs astronomiques en usage en Géodésie. Cette partie de mon travail comprend la détermination des longitudes terrestres. J'y démontre d'une manière nouvelle, les formules que Lagrange a données pour calculer les éclipses de Soleil et les occultations des étoiles par la Lune; et après leur avoir fait subir des transformations qui les rendent beaucoup plus propres au calcul numérique, je passe aux exemples.

Enfin, le sixième livre a rapport aux questions les plus importantes sur la figure de la Terre, et à la détermination des hauteurs par les mesures barométriques.

Tels sont les principaux objets qui entrent dans cet Ouvrage. Quant à la théorie des projections des Cartes, j'ai cru devoir l'insérer dans le Traité de Topographie dont je prépare une seconde édition.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

(Les chiffres romains indiquent le volume de cet Ouvrage, et les chiffres arabes en désignent les pages.)

A

Aberration, I, 34; (formules d'), II, 63.
Achromatiques (lunettes), I, 144; II, 85.
Aire, ou mesure des surfaces, I, 328.
—— d'une zône sphérique, I, 330.
—— d'une zône sphéroïdique, I, 332.
Alidades du cercle répétiteur, I, 143.
Almicantarats, I, 24.
Amplitude (ortive, occasale), I, 9.
—— d'un arc terrestre, I, 317.
—— des oscillations du pendule; sont constantes dans le vide, mais diminuent dans un milieu résistant, II, 302.
Angle horaire, I, 26.
—— *de la verticale avec le rayon*, I, 257; II, 45.
—— *au centre*; c'est celui qu'on observe au centre même d'un signal, I, 182.
—— *de direction*; sert pour réduire un angle de position au centre du signal, I, 183.
—— *de position*; c'est celui qu'on observe près d'un signal dont le centre est inaccessible, I, 182.
Année (sidérale, tropique, anomalistique), I, 14.
—— (civile, Julienne), I, 16.
Anomalie (vraie, moyenne), I, 13.
Aphélie, I, 22.
Aplatissement ou ellipticité de la Terre, I, 259; sa valeur déduite des mesures géodésiques, I, 278; II, 248; sa valeur déduite des observations du pendule, II, 339.
Apogée, I, 10.
Apsides, I, 10.
Arc (semi-diurne, semi-nocturne), I, 5.
Arc de méridien; formules pour l'évaluer, I, 275 et 316.
—— *de parallèle*; formules pour l'évaluer, I, 320.
Ascension droite d'un astre, I, 8.
—— moyenne, I, 13.
Ascension (l') *droite apparente* d'une étoile est le tems sidéral de son passage au méridien, II, 79.
Axe du monde, I, 2.
Axes de la Terre; leur valeur numérique, I, 280.
—— de suspension, II, 290.
Azimut d'un astre, I, 9.
—— d'un signal; détermination des azimuts par les opérations géodésiques, I, 310 et 314.
Azimutales (observations), II, 150.
—— par le Soleil, II, 155.
—— par la polaire, II, 158.
—— à l'aide du théodolite répétiteur, II, 164.
—— au moyen de l'instrument des passages, II, 167.

B

Baromètre; sa théorie et son usage pour mesurer les hauteurs, II, 344. Table pour avoir égard à la dépression du mercure, due à l'action capillaire, II, 356.
Base; instrumens qui servent pour mesurer les bases, I, 196 et 203; réductions dont elles sont susceptibles, pour les rendre comparables, I, 199 à 203.
Manière la plus avantageuse pour faire disparaître l'erreur entre une base calculée et sa mesure directe, II, 284.

C

Calendrier Grégorien, I, 16.
Canevas trigonométrique, I, 132.
Carte topographique; idée de la manière d'en former le canevas, I, 132 à 137.
Centre d'oscillation; sa propriété, II, 314.
Cercles polaires, I, 8.
Cercle répétiteur de Borda; sa description et ses usages, I, 142; II, 92, 105, 124, 150.
Champ d'une lunette, I, 144; II, 84.
Chronomètre ou garde-tems, II, 180; son usage pour déterminer les longitudes géographiques, II, 181.

Coefficient de la réfraction terrestre, I, 343.
Collimation, (erreur de) I, 161.
Colure, II, 43.
Comète, I, 2 et 44.
Compensateur, II, 101 et 182.
Compteur, pendule qui sonne et marque les secondes, II, 114.
Constante de la réfraction, moyen de la déterminer, II, 145.
Constellations, I, 3; moyens de les reconnaître, II, 87.
Convergence des méridiens, I, 314.
Coordonnées d'un point trigonométrique; méthodes pour les calculer, I, 247.

D

Déclinaison d'un astre, I, 8.
—— du Soleil, moyen de la déterminer par les tables astronomiques, II, 3 et 11.
Degré; la 360e partie de la circonférence.
—— du méridien, I, 295.
—— de longitude, I, 294.
—— d'un arc oblique, I, 289.
—— d'un arc perpendiculaire au méridien, I, 289.
Dépression (angle de), I, 156.
Difference des méridiens ou de longitude, I, 22.
—— *de niveau*; formules pour calculer les différences de niveau; 1°. en supposant la Terre sphérique, I, 354; 2°. en supposant la Terre elliptique, I, 366.
Détermination des différences de niveau par le concours des observations géodésiques et barométriques, II, 357.
Digressions de la polaire; font connaître la latitude d'un lieu, II, 142.
Distance au zénit, I, 156.
—— *de l'équinoxe au Soleil*, II, 8.
Distances zénitales des astres; servent à déterminer le tems, II, 105; la latitude, II, 136. Erreur dont elles sont susceptibles, II, 147.
—— *méridiennes*, II, 124; corrections des distances observées près du méridien, II, 124.

E

Éclipses (calcul des), II, 185.
Écliptique, I, 6.
Ellipsoïde de révolution; son équation, I, 285. Evaluation de sa surface et de son volume, II, 336 et 337.
Ellipticité de la Terre (voyez *Aplatissement*).
Élongation, I, 28.
Équateur, I, 3.
Équation du centre, I, 13.
—— *du tems*, I, 14.
—— *annuelle*, I, 30.
—— *des hauteurs correspondantes*, II, 94.
—— *de la pendule*, II, 100.
Équinoxes, I, 6.
Équinoxiale (ligne), ou équateur, I, 3.
Étoile polaire; son usage pour déterminer la hauteur du pôle, II, 129; pour orienter un réseau trigonométrique, II, 158. On peut l'observer de jour avec une forte lunette.
Étoiles circompolaires, I, 4.
—— *fixes*, I, 2.
Évection, I, 29.
Excentricité des lunettes, I, 171.
—— *de l'orbe terrestre*, II, 64.
—— *de la Terre*; son expression analytique, I, 255; sa valeur numérique, I, 277.
Excès sphérique, I, 118 et 225.

F

Figure de la Terre, I, 18; méthodes géodésiques pour la déterminer, I, 272; II, 242 à 290; comment les observations du pendule la font connaître, II, 337.
Formules différentielles trigonométriques; leur usage en Géodésie, I, 322 à 327.
Foyer d'une lunette, I, 145, II, 82.

G

Géodésie; son objet, I, 132.
Grade, la 100e partie du quadrant; valeur du grade du méridien, I, 295; du grade de longitude, I, 294.
Gravité (voyez *Pesanteur*).

H

Hauteur du pôle, I, 23; manière de la déterminer, II, 124 à 139.
—— *d'un astre*, I, 8.
—— (apparente, vraie), I, 19.
Hauteurs (détermination des) par les opérations trigonométriques, I, 350; par les mesures barométriques, II, 344.
Heure sidérale, I, 4.
—— *solaire*, I, 4.
Horizon sensible, I, 1.
—— *rationnel*, I, 2.
Horloge astronomique (voyez *Pendule*).

I

Index, ou ligne de foi, I, 143.
Inégalités (séculaires, périodiques), I, 38 et 39.
Inflexion, II, 202.
Interpolation (méthodes générales et particulières d'), I, 120 à 132.
Irradiation, II, 201.
Isochrone, II, 290.

J

Jour sidéral, I, 4 et 15.
—— *vrai* ou astronomique, I, 12.
Jour civil, I, 12.
—— *moyen*, I, 13 et 15.

K

Képler; énoncé de ses lois, I, 38.

L

Latitude d'un astre, I, 8; II, 10.
—— *du zénit*, II, 42.
—— *géographique*, I, 23.
Latitudes (détermination des) des points d'un réseau trigonométrique, I, 297.
—— (observations et calculs des), II, 124.
Libration, I, 27.
Ligne des équinoxes, I, 7.
—— *équinoxiale*, ou équateur, I, 3.
—— *géodésique*; ses équations, I, 250; II, 216 et 256.
—— *de niveau vrai*, I, 350.
—— *de niveau apparent*, I, 350.
Lignes du sphéroïde terrestre en fonction de la latitude, I, 254 à 276.
Lois de Képler, I, 38.
Longitude céleste, I, 8.
—— *du zénit*, II, 42.
—— *moyenne*, I, 13.
—— *géocentrique*, I, 21.
—— *héliocentrique*, I, 21.
—— *terrestre*, I, 22; différens moyens pour la déterminer, II, 180.
Lune; ses phases, I, 27.
—— ses principales inégalités, I, 29.
Lunette d'épreuve, I, 148.
—— *astronomique*; notions sur ses effets, II, 80.
—— *des passages*, son usage en Géodésie, II, 167 à 179.

M

Médiation, I, 3 (voyez *point culminant*).
Méridien, I, 2.
—— (le) terrestre est une courbe plane sur l'ellipsoïde de révolution II, 255; est une courbe à double courbure sur le sphéroïde irrégulier, II, 255. Formules pour rectifier un arc du méridien terrestre, connaissant les latitudes de ses extrémités I, 272; comment on détermine son amplitude quand on connaît sa longueur, I, 284.
Méridienne terrestre; manière de la déterminer par les opérations géodésiques, I, 242; II, 261.
Mesure des angles, I, 148 et 156.
Méthode des hauteurs correspondantes, II, 92 à 105.
Méthode des hauteurs absolues, II, 105 à 115.
—— *des hauteurs absolues* (remarques sur la), II, 115.
—— *des moindres quarrés*, appliquée aux mesures géodésiques, II, 245; appliquée aux mesures du pendule, II, 338.
Mètre; la dix-millionnième partie du quart du méridien; sa valeur légale est de 3 pieds 11 lignes $\frac{296}{1000}$ de l'ancienne toise de l'Academie, prise à 13° du thermomètre de Réaumur, I, 278.
Micromètre, II, 85.
Microscope ou loupe; s'adapte aux instrumens pour lire plus aisément leurs divisions, I, 143.
Mire (point de), I, 139.
Mois (synodique, périodique), I, 29.

N

Nadir, I, 2.
Newton découvre la loi de la pesanteur universelle, I, 37, et en déduit pour conséquence que la Terre, douée d'un mouvement de rotation, doit être aplatie vers les pôles et renflée vers l'équateur, II, 243.
Niveau (ligne et surface de), I, 350.
—— *vrai*, I, 350.
—— *apparent*, I, 350.
—— (différence de), comment on la détermine, I, 357; II, 344.
Niveau à bulle d'air, I, 146 et 162.
Nivellement géographique, I, 350 à 374; II, 344 à 359.
Nœuds de la Lune, I, 27.
Nonagésime, II, 42.
Nonius ou Vernier, I, 143.
Nord, I, 2.
Nutation, I, 33.
—— (formules de) II, 60.

O

Objectif, I, 144.
Obliquité de l'écliptique, I, 8; sa valeur moyenne, I, 6; II, 9; sa diminution séculaire, II, 54; moyens de la calculer par les tables, II, 10; de la déduire de l'observation, II, 139.
Observations conjuguées, I, 151.
—— *astronomiques*, I, 168; II, 92 à 212.
—— *solstitiales*, II, 140.
Occident, I, 3.
Oculaire, I, 144.
Octans, I, 28.
Opérations géodésiques, I, 132.
Orient, l'un des quatre points cardinaux, I, 3.
Orientation d'un réseau trigonométrique, II, 150.
Oscillations du pendule, II, 150; sont isochrones dans un milieu résistant comme dans le vide, II, 301.

P

Parallaxe des fils du réticule, I, 145.
—— (horizontale, annuelle, équatoriale), I, 24 et 25.
—— Formules de parallaxe, II, 36 à 49.
Parallèles à l'équateur, I, 3; longueur du grade d'un parallèle connu, I, 294.
Passages (instrument des), II, 167.
—— *des astres au méridien*, s'observent pour déterminer la hauteur du pôle, II, 126.
Pendule (théorie du), II, 290 à 317. Du pendule simple, II, 290. Du mouvement du pendule dans un milieu résistant, II, 296. Le tems de l'oscillation entière est le même que si le mouvement avait lieu dans le vide, II, 301. Loi suivant laquelle les amplitudes décroissent, II, 302. Mouvement du pendule dans la supposition d'un fil extensible, II, 304. Correction des amplitudes, II, 312. Propriété du centre d'oscillation, II, 314.
Détail des expériences pour déterminer la longueur du pendule à secondes, en faisant usage de l'appareil de Borda, II, 317.
Il est nécessaire d'avoir égard au rayon du cylindre qui forme le tranchant du couteau de suspension, II, 326. Valeur de l'aplatissement de la Terre déduite des longueurs observées du pendule, II, 337. Appareil à double suspension, II, 328.
Pendule astronomique; manière de la régler par les hauteurs correspondantes du Soleil, II, 92; par les hauteurs absolues, II, 105; par les observations des étoiles, II, 110.
Périgée, I, 10.
Périhélie, I, 21.
Perpendiculaire à la méridienne; manière de la tracer, I, 245; ses équations sur le sphéroïde elliptique, II, 221; sa propriété II, 230; ses équations sur un solide irrégulier peu différent d'une sphère, II, 267. Formules pour corriger la mesure de cette ligne, et la différence en longitude de ses points extrêmes, II, 283.
Perturbations planétaires, I, 38.
Pesanteur; son intensité dans le vide est plus grande que dans un milieu résistant, II, 304; sa valeur numérique, II, 337.
Phases de la Lune, I, 27.
—— *des signaux*, I, 191.
Planètes (anciennes et nouvelles), I, 2 et 41.
Point de mire, I, 139.
—— *culminant*; c'est celui où l'astre est le plus élevé au-dessus de l'horizon.
Polaire (étoile); son usage pour déterminer la latitude géographique, II, 129 (voyez *Étoiles*).
Pôles du monde, I, 2.
Portée, I, 209.
Position moyenne des astres, I, 32; II, 50.
—— *apparente des étoiles*, I, 35; II, 60.
—— (calcul de la) apparente d'une étoile, II, 75.
—— *géographique*, I, 23.
Précession des équinoxes, I, 31.
—— *luni-solaire*, I, 32.
—— *générale*, I, 32.
—— (formules de), II, 50 à 59.
Premier mobile, I, 4.

Q

Quadrant, ou quart de la circonférence.
Quadratures, I, 28.
Quart du méridien, sa valeur, I, 277 et 278.

R

Rayon visuel; droite que l'on conçoit menée de l'œil à l'objet auquel on vise.
Rayon réduit en secondes, I, 100.
—— *de la Terre*; sa valeur, I, 279.

Rayon du pôle, sa valeur, I, 280.
—— *de l'équateur*, sa valeur, I, 280.
—— *de plus grande et de plus petite courbure*, I, 285.
—— *de l'ellipsoïde osculateur*, II, 281.
Reconnaissance trigonométrique, I, 138.
Rectification d'un arc du méridien, I, 272.
—— *du niveau à bulle d'air*, I, 167.
—— *des calculs géodésiques*, I, 322.
Réduction au sommet des signaux, I, 346.
—— *à l'axe d'un signal*, I, 182 (voyez *phase*).
—— *au centre*, I, 182.
—— *à l'horizon*, I, 174.
—— *au plan des cordes*, I, 177.
—— *des bases à une température donnée*, I, 197; *à l'horizon*, I, 200.
—— *des bases au niveau de la mer*, I, 203.
Réflecteur, I, 170.
Réforme Julienne ou *vieux style*, I, 16.
Réfraction astronomique, I, 19; II, 18.
—— *terrestre*, I, 342 à 347.
Réfraction terrestre (coefficient de la), I, 343 et 349.
—— *astronomique*, I, 18; formules pour la déterminer, II, 18 à 32.
—— (usage des tables de), II, 34.
Règles pour mesurer les bases, I, 196. Description et usage des règles de platine, I, 203.
Relever un angle, c'est déterminer le nombre de degrés, minutes et secondes qu'il contient.
Répartition de l'erreur qui affecte la somme des trois angles observés d'un triangle, I, 220.
Repères; piquets qu'on enfonce en terre, pour reconnaître au besoin le centre de la station.
Résolution des triangles par la voie des séries, I, 99 à 120.
—— *des triangles géodésiques*, I, 219; II, 221 à 241.
Réticule, I, 145.
Rétournement, I, 167.
Réverbères, s'employent comme signaux de nuit, I, 140.

S

Satellites, I, 2 et 43.
Signaux; leur forme la plus avantageuse, I, 139.
Signes du zodiaque, I, 6 et 7; chaque signe vaut 30°.
—— (ascendans, descendans), I, 7.
Solstices, I, 10.
Son; sa vitesse, I, 376.
Sphère; cas où la Terre peut être considérée comme telle, I, 374.
Sphéroïde terrestre; sa théorie, I, 254 à 295; II, 212 à 283.
Sphéroïde elliptique de révolution (équation du), I, 285; du sphéroïde peu différent d'une sphère, II, 256.
Station; lieu où l'on place l'instrument pour observer,
Synchrone, II, 294.
Système planétaire, (exposition abrégée du) I, 37 à 45.
Syzygies, I, 28.
Sud, l'un des quatre points cardinaux, I, 2.
Suspension (axe de), II, 328.

T

Tables géodésiques; fin du tome I.
Tables astronomiques; fin du tome II.
Tems; sa mesure, I, 12; II, 92.
—— *sidéral*, I, 4.
—— *moyen*, I, 13.
—— *vrai* ou astronomique, I, 12.
Théodolite répétiteur; sa description et ses usages, I, 166; II, 164.
Thermomètre; son usage dans les observations barométriques, II, 345.
Transformation des coordonnées circulaires, II, 43.
Triangles, moyen de les bien conditionner, I, 136.
—— *primaires* ou du premier ordre, I, 132.
Triangles secondaires ou du second ordre, I, 132.
—— *rectiligne*; évaluation de sa surface, I, 57.
—— *sphérique*; évaluation de sa surface, I, 94 à 97.
Triangles, (résolution approximative des) I, 99 à 120.
Triangulation; c'est l'ensemble des triangles à l'aide desquels on détermine les positions respectives des principaux points d'une carte ou d'un plan, I, 132.
Trigonométrie rectiligne, I, 46 à 58.
—— *sphérique*, I, 58 à 98.
Tropiques, I, 11.

U

Unité de mesure linéaire (voyez *Mètre*).

V

Variation, est une inégalité lunaire, I, 29.
Vérification des calculs géodésiques, I, 310 et 358.
Vernier, son usage, I, 143.
Vertical d'un astre, I, 9.
Verticale, I, 2.
Vitesse du pendule, dans un milieu résistant, II, 300.
—— *du son*, I, 376.

Z

Zénit, I, 2.
Zodiaque, I, 6.
Zônes terrestres, I, 24. Evaluation de leur étendue superficielle, I, 331.

FIN DE LA TABLE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES.

TABLE DES CHAPITRES.

LIVRE PREMIER.

NOTIONS DE LA SPHÈRE ET DU MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES.

CHAPITRE PREMIER. *Du mouvement diurne de la sphère céleste,* page 1

CHAPITRE II. *Du mouvement propre du Soleil, des signes du zodiaque, et de la position des astres par rapport à l'équateur, à l'écliptique et à l'horizon,* 6

CHAPITRE III. *Suite du mouvement propre du Soleil; de la mesure du tems et de la durée des saisons,* 10

De l'année civile, et du calendrier Grégorien, 16

CHAPITRE IV. *De la rondeur de la Terre, de son atmosphère et de la réfraction astronomique,* 18

CHAPITRE V. *Du mouvement de la Terre autour du Soleil; des longitudes et latitudes géographiques, et des différentes parallaxes des astres,* 21

CHAPITRE VI. *Du mouvement et des phases de la Lune, et de ses principales inégalités,* 27

CHAPITRE VII. *De la précession des équinoxes; de la nutation, de l'aberration et du déplacement de l'écliptique,* 31

CHAPITRE VIII. *Exposition abrégée du système planétaire,* 37

Des comètes, 44

LIVRE II.

ANALYSE DES DEUX TRIGONOMÉTRIES.

CHAPITRE PREMIER. *De la Trigonométrie rectiligne,* 46

Diverses expressions de l'aire d'un triangle rectiligne, 57

CHAPITRE II. *De la Trigonométrie sphérique,* 58

Formules pour la résolution des triangles sphériques rectangles, 60

Formules pour la résolution des triangles sphériques obliquangles, 65

De quelques propriétés remarquables du triangle sphérique, et notamment de diverses expressions de sa surface, 91

CHAPITRE III. *Résolution, par les séries, de divers cas particuliers de la Trigonométrie,* page 99
Résolution d'un triangle rectiligne dont deux côtés sont donnés avec l'angle compris, 101
Résolution du triangle sphérique rectangle, 105
Résolution d'un triangle sphérique dont deux côtés sont peu différens du quadrant, 107
Résolution d'un triangle sphérique dont un côté est très petit à l'égard des deux autres, 109
Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère, 116
CHAPITRE IV. *Méthodes particulières et générales d'interpolation des lignes trigonométriques,* 120

LIVRE III.

OPÉRATIONS ET CALCULS GÉODÉSIQUES.

CHAPITRE PREMIER. *Considérations générales sur la formation des canevas des grandes cartes topographiques,* 132
CHAPITRE II. *De la meilleure condition des triangles; du choix et de la construction des signaux,* 136
CHAPITRE III. *Description et usages du cercle répétiteur,* 142
De la mesure des angles entre deux objets. 148
De la mesure des distances zénitales, 156
Du theodolite répétiteur, 166
De l'usage du cercle dans les observations astronomiques, 168
CHAPITRE IV. *De la correction à faire aux angles mesurés avec le cercle répétiteur, à raison de l'excentricité des lunettes,* 171
CHAPITRE V. *De la réduction des angles d'un plan à un autre plan,* 174
Réduction à l'horizon, ibid.
Réduction des angles horizontaux aux angles des cordes, 177
Conversion des grades en degrés, et *vice versâ*, ibid.
Réduction d'un angle pris dans un plan à un autre plan incliné à l'horizon, 180
CHAPITRE VI. *De la réduction des angles au centre de la station,* 182
Centres visibles et accessibles, ibid.
Centres invisibles des tours à bases circulaires, 188
Centres invisibles des tours à bases polygonales, 189
CHAPITRE VII. *De la réduction au centre du signal observé, ou de la phase des signaux,* 191

CHAPITRE VIII. *De la mesure des bases, des moyens de les ramener à une température unique, et de les réduire au niveau de la mer,* page 196

Description et usage des règles de platine qui ont servi dans l'opération de la méridienne de France, page 203

CHAPITRE IX. *Application de la théorie précédente au calcul des bases,* 209

PREMIER EXEMPLE. (*Base mesurée en Bavière*), ibid.

DEUXIÈME EXEMPLE. (*Base de Melun*), 213

CHAPITRE X. *Du calcul des triangles, et de quelques problèmes de Géodésie,* 219

Résolution des triangles géodésiques, considérés comme des triangles sphériques, 219

Résolution des triangles sphériques peu courbes, par la Trigonométrie rectiligne, et évaluation de l'excès sphérique, 223

Résolution des triangles rectilignes, formés par des cordes de la sphère terrestre, 232

Déterminer la position d'un lieu d'où l'on aperçoit trois points donnés sur la carte, et la plus courte distance de deux lignes dont on connaît la latitude et la longitude, 233

CHAPITRE XI. *Du tracé et du calcul de la méridienne terrestre, et des perpendiculaires à cette méridienne,* 242

Équations différentielles de la ligne géodésique déduites du mode de son tracé, 250

CHAPITRE XII. *Recherches des formules pour exprimer en fonction de la latitude, différentes lignes de l'ellipsoïde de révolution, et application de ces formules au sphéroïde terrestre,* 254

CHAPITRE XIII. *Développemens en séries des formules précédentes,* 262

SÉRIES FONDAMENTALES, ibid.

Applications des séries fondamentales, 269

CHAPITRE XIV. *Continuation de la recherche des expressions analytiques des diverses lignes du sphéroïde terrestre,* 282

CHAPITRE XV. *Calculs des latitudes, longitudes et azimuts des objets terrestres,* 296

CHAPITRE XVI. *Application des formules précédentes à la détermination d'une méridienne et d'un arc de parallèle,* 315

CHAPITRE XVII. *Usage des formules différentielles trigonométriques pour corriger les positions géographiques provisoires des points principaux d'une carte,* 322

CHAPITRE XVIII. *Évaluation de l'étendue superficielle de la Terre et d'une partie quelconque de sa surface,* 328

De l'aire d'un triangle et de celle d'un trapèze sphérique, page 328
De l'aire d'une portion de zône sphéroïdique, 333
CHAPITRE XIX. *De la réfraction terrestre; moyen de la déterminer sur la Terre supposée sphérique*, 342
Calcul de la réfraction terrestre et de son coefficient, 347
CHAPITRE XX. *Détermination des différences de niveau, par les procédés trigonométriques*, 350
PREMIÈRE HYPOTHÈSE. *La Terre étant sphérique*, ibid.
DEUXIÈME HYPOTHÈSE. *La Terre étant un ellipsoïde de révolution*, 362
TABLEAU *de plusieurs quantités numériques employées en Géodésie*, 375
Tables géodésiques, 377

ERRATA DU PREMIER VOLUME.

Pages.	Lignes.	au lieu de	*lisez*
22	13 en remontant	que forme	que forment
23	5 en remontant	déterminé	déterminée
51	6 en remontant	*d'un des côtés*	*de l'autre côté*
65	dernière ligne	après précédemment	(art. 45)
69	7 en remontant	première ligne	première et quatrième ligne
101	*Ib.*	$= -\frac{\theta^2}{2}$	$= 1 - \frac{\theta^2}{2}$
109	9 en remontant	aux deux termes du second membre, au lieu du coefficient $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
117	9 en remontant	sin A'	$\sin^2 A'$
153	9 en remontant	(a')	(a)
155	14 en remontant	89752	89725
202	13 en remontant	au dénominateur du 1er et du 2e membre, ρ^2	ρ^3
253	18	z	z'
Ib.	19	z	z''
294	2 en remontant	de la Table	de la Table XI
306	équation (b_n)	cos H'	cos H_1
310	3 en remontant	poition	position
313	18 calc. de gauch.	F corrigé	P corrigé
314	1	$\frac{8}{100}$	$\frac{4}{100}$
340	7	presque constantes	*ajoutez*, et très petites
353	1	aura	aurait
358	2	+ etc.	— etc.
Ib.	7	6,60240 +	6,60240 —
Ib.	8	+ 0m,0004	— 0m,0004
373	2	au dénominateur $(1 - n)^2$	$(1 - n)$

Table VI, au lieu de P et P', *lisez* K et K'; et à la fin du *Nota*, *ajoutez* : si l'on fait usage de la Table I, et en secondes sexagésimales, si l'on emploie la Table III, 1ere partie.

Addition à l'article 177.

Lorsqu'on ne veut former aucune hypothèse sur la figure des méridiens, on considère les coefficiens des termes qui expriment la valeur de l'arc A comme des quantités indeterminées; alors si on connaît quatre arcs, on pourra déterminer les quatre premiers coefficiens qui sont les plus considérables de la série. (*Voyez* pag. 93 du tom. III de la *Base du Système métrique décimal.*)

TRAITÉ
DE GÉODÉSIE.

LIVRE PREMIER.

NOTIONS DE LA SPHÈRE ET DU MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES.

CHAPITRE PREMIER.

Du mouvement diurne de la Sphère céleste.

1. L'OBSERVATEUR qui, pendant une belle nuit, contemple le ciel, conçoit tous les astres à la surface d'une sphère immense, et à l'extrémité des rayons qui partent de son œil pris pour centre de cette sphère. Vu la petitesse du rayon de notre globe à l'égard de celui de la sphère céleste, l'observateur se suppose en outre au centre même de la Terre, autour duquel tous les astres paraissent tourner; enfin, pour mieux connaître leurs positions respectives, il les rapporte à différens cercles qu'il imagine dans le ciel : voici ceux qu'il importe d'abord de connaître.

L'*horizon sensible* ou apparent est le plan tangent à la surface de la Terre supposée sphérique, et le point de contact est le lieu même de l'observateur.

L'*horizon rationnel* ou *mathématique* est le plan qui, passant par le centre de la Terre, est parallèle à l'horizon sensible. La ligne joignant le lieu de l'observateur et le centre de la Terre, et prolongée de part et d'autre dans le ciel, est la *verticale* de ce lieu; enfin le point de cette ligne qui répond au-dessus de l'observateur, est le *zénit*, et le point opposé est le *nadir*.

Les astres se lèvent lorsqu'ils commencent à paraître à l'horizon, et ils se couchent lorsqu'ils passent au-dessous du plan de ce cercle.

Pour expliquer le mouvement commun et diurne des astres, il suffit d'attribuer à la sphère céleste un mouvement de rotation d'orient en occident autour d'une ligne, dont les extrémités sont les *pôles du monde :* cette ligne qui passe par le centre de la Terre ou de la sphère céleste, se nomme l'*axe du monde*.

Le pôle élevé sur notre horizon est le *pôle boréal* ou *septentrional*, ou simplement *nord;* et le pôle opposé, qu'on imagine au-dessous de ce même horizon, est le *pôle austral* ou *méridional*, ou simplement *sud*.

Le grand cercle passant par le zénit et par les pôles, se nomme *méridien*.

2. Les étoiles qui paraissent conserver entre elles la même situation, se nomment *fixes*. Les astres, au contraire, qui changent de position les uns à l'égard des autres s'appellent *planètes* ou *étoiles errantes*. Depuis un tems immémorial, on en connaît sept, savoir : le *Soleil*, la *Lune*, *Mercure*, *Vénus*, *Mars*, *Jupiter* et *Saturne*, parce qu'on les aperçoit à la vue simple ; mais vers la fin du siècle dernier et au commencement de celui-ci, les astronomes, aidés de télescopes, en ont découvert cinq autres, qui sont *Uranus*, *Cérès*, *Pallas*, *Junon* et *Vesta*.

On remarque parfois aussi une troisième espèce d'astres : ce sont les *comètes* ou astres chevelus, qui ne se montrent que pendant un certain tems, et qui changent visiblement de place à l'égard des fixes.

Lorsque les astronomes eurent acquis une connaissance exacte des mouvemens des corps célestes, ils appelèrent simplement *planètes* les astres qui font leur révolution autour du Soleil, et désignèrent par le nom de *satellites* ceux qui accompagnent les planètes dans leur course, en tournant autour d'elles. La Lune, par exemple, est

le satellite de la Terre qui, en tournant sur elle-même, fait sa révolution autour du Soleil. Nous expliquerons plus loin le système planétaire.

Quant aux étoiles fixes, dont le nombre est immense, on en a formé différens groupes, afin de les mieux reconnaître. Chaque groupe se nomme *constellation.*

3. Les étoiles dispersées dans l'espace, et supposées toutes aux confins de la sphère céleste, décrivent donc chaque jour des cercles d'autant plus petits qu'elles sont plus près des pôles du monde. Le plus grand de ces cercles est évidemment celui dont tous les points sont également distans des deux pôles : on le nomme *équateur.* Quant aux cercles parallèles à celui-ci, on les désigne simplement sous le nom de *parallèles.* Les pôles du monde sont les pôles mêmes de l'équateur et de tous les parallèles.

L'équateur partage la surface de la sphère en deux parties égales ; l'une forme l'hémisphère septentrional, l'autre l'hémisphère méridional.

Des deux points où l'équateur coupe l'horizon, l'un se nomme *orient,* c'est celui où se lève une étoile qui décrit le premier cercle ; l'autre se nomme *occident,* c'est le point où la même étoile se couche.

Le méridien du lieu de l'observateur coupe aussi l'horizon en deux points ; l'un s'appelle *sud,* parce qu'il est du côté où se trouve le Soleil à midi par rapport à nous ; l'autre, qui lui est opposé, se nomme *nord :* ces quatre points se désignent sous le nom commun de *points cardinaux.* Lorsqu'un astre est dans le méridien de l'observateur, il est à son point culminant, ou à sa plus grande hauteur au-dessus de l'horizon : ce point se nomme aussi *médiation.*

4. A l'aide d'un quart de cercle à lunette, placé exactement dans le méridien, et d'une excellente horloge ou pendule, on s'assure de l'existence des étoiles réellement fixes, et de l'uniformité du mouvement périodique du ciel. En effet, si chaque fois qu'une étoile passe à la même partie du méridien, l'on mesure sa hauteur angulaire au-dessus de l'horizon, et si cette hauteur est toujours constante, on doit en conclure que l'étoile est fixe. En comptant dans ce cas, l'heure, la minute et la seconde marquées par la pendule à l'instant de chaque passage au méridien, l'on s'apercevra que l'intervalle de tems entre deux passages consécutifs ne varie jamais ; et en

répétant cette observation sur toute autre étoile fixe, on verra que le nombre d'heures, de minutes et de secondes écoulées depuis son passage au méridien jusqu'à son retour au même point, n'a nullement changé. Mais il n'est pas nécessaire que la lunette soit précisément dans le plan du méridien; elle peut être placée dans un plan vertical quelconque; l'intervalle de tems entre deux passages au fil de la lunette sera toujours le même. Ainsi, il est constant que le mouvement de la sphère céleste ou du *premier mobile* est uniforme, et que les étoiles fixes décrivent journellement des cercles de la sphère dont les plans sont perpendiculaires à l'axe du monde.

Tous les astronomes partagent en 24 heures le tems qui s'écoule entre deux passages consécutifs d'une étoile à la même partie du méridien : cette durée se nomme, pour cette raison, *jour sidéral;* et la 24e partie de ce tems s'appelle *heure sidérale.* L'heure se divise en 60 minutes, la minute en 60 secondes, et ainsi de suite.

Il résulte de ce qui vient d'être dit, que tous les jours sidéraux sont égaux, et que pour qu'une pendule soit réglée sur le tems sidéral, il faut qu'en lui faisant marquer, par exemple, $0^h 0' 0''$ à l'instant où une étoile passe au méridien, elle indique précisément la même heure chaque fois que cette étoile y revient.

Quelle que soit l'inclinaison de l'axe du monde sur l'horizon, la durée de la présence d'une étoile qui décrit l'équateur, est la même au-dessus de l'horizon qu'au-dessous; mais une étoile qui décrit un parallèle, est visible d'autant plus long-tems que ce parallèle est plus près du pôle élevé, et que l'angle que l'axe du monde fait avec l'horizon diffère moins de l'angle droit. Ainsi au pôle élevé, les étoiles ne se lèvent ni ne se couchent jamais : c'est ce qui a lieu aussi pour celles qui décrivent des parallèles dont le plan n'est point coupé par l'horizon; telles sont pour nous les étoiles de la *grande Ourse,* la *Polaire,* etc. Dans ce cas, l'on voit les étoiles passer deux fois au méridien pendant un jour sidéral; par exemple, la première fois au *méridien supérieur,* c'est-à-dire du côté du zénit, et la seconde fois, au *méridien inférieur,* c'est-à-dire entre le pôle et l'horizon. Ces étoiles se nomment, pour cette raison, *circompolaires.*

Si on jette un coup-d'œil sur la figure 1, on reconnaîtra de suite la vérité de ce fait. En effet, soient P, P' les pôles du monde, C le centre de la Terre, Z le zénit, N le nadir, OH l'horizon rationnel, EQ l'équateur, et AB, $A'B'$, DF, $D'F'$ des cercles qui lui soient pa-

rallèles. Il est évident que pour un observateur dont le zénit est en Z, et le pôle élevé en P, l'étoile qui décrit le cercle $D'F'$ est toujours invisible; que celle qui décrit le cercle DF, au contraire, ne se couche jamais. Quant à l'étoile qui décrit l'équateur, elle paraît 12 heures au-dessus de l'horizon et reste 12 heures invisible, parce que les arcs *semi-diurne* et *semi-nocturne* EM, QM sont égaux. Enfin, des deux étoiles qui décrivent l'une le cercle AB, l'autre le cercle $A'B'$, la première reste plus long-tems au-dessus de l'horizon qu'au-dessous, et la seconde disparaît pendant plus de 12 heures; parce que dans le premier cas l'arc semi-diurne $An > Bn$, et que dans le second cas l'on a $A'n' < B'n'$.

CHAPITRE II.

Du mouvement propre du Soleil, des signes du zodiaque, et de la position des astres par rapport à l'équateur, à l'écliptique et à l'horizon.

5. Le Soleil, comme toutes les étoiles fixes, semble emporté d'orient en occident par le mouvement périodique du ciel. Cependant on s'aperçoit bientôt, en le soumettant à l'épreuve indiquée précédemment, qu'il ne conserve pas la même position par rapport aux étoiles, et qu'il paraît doué d'un mouvement propre d'occident en orient. En effet, après une longue suite d'observations exactes de sa hauteur méridienne, et de l'intervalle de tems qui s'écoule entre son passage et celui des étoiles au méridien, l'on a reconnu qu'il se meut dans un orbe plan incliné à l'équateur de 23° 28′ environ, et ayant la forme d'une ellipse peu *excentrique* ou peu allongée, à l'un des foyers de laquelle se trouve la Terre. Mais considérons, quant à présent, cet orbe, qu'on nomme *écliptique*, comme un grand cercle de la sphère céleste, et concevons-le divisé en douze parties égales, à partir du point où le Soleil se trouve au commencement du printems, c'est-à-dire à l'un des points d'intersection de l'écliptique et de l'équateur, points qu'on nomme *équinoxes*. Chacune de ces parties comprendra évidemment 30°, puisque la circonférence entière en contient 360 : ce sont ces parties auxquelles on a donné le nom de *signes*.

6. Toutes les planètes anciennes, excepté le Soleil, s'éloignent plus ou moins de l'écliptique, tantôt vers un pôle de ce grand cercle, tantôt vers l'autre. Les anciens avaient remarqué que les orbites des planètes se trouvent comprises dans une zône de 16 à 18°, partagée en deux parties égales par l'écliptique; c'est cette zône qu'ils désignèrent sous le nom de *zodiaque*.

Les douze signes du zodiaque et les caractères qui les distinguent sont :

Sign.		Degr.	Sign.		Degr.
0 ♈	le Bélier.	0	6 ♎	la Balance	180
1 ♉	le Taureau.	30	7 ♏	le Scorpion.	210
2 ♊	les Gémeaux.	60	8 ♐	le Sagittaire.	240
3 ♋	l'Écrevisse.	90	9 ♑	le Capricorne.	270
4 ♌	le Lion.	120	10 ♒	le Verseau.	300
5 ♍	la Vierge.	150	11 ♓	les Poissons.	330

Afin d'aider la mémoire à les retenir, on les a exprimés par ces deux vers latins :

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libra, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

Il y a aussi douze constellations qui portent les mêmes noms, et qui forment les constellations zodiacales.

L'ordre de ces signes a lieu d'occident en orient, qui est le sens du mouvement propre du Soleil. Lorqu'un astre se meut suivant cet ordre, on dit que son mouvement est *direct;* lorsqu'au contraire il paraît aller dans une direction opposée, son mouvement est *rétrograde;* enfin, si pendant un certain tems l'astre semble fixe, on le dit *stationnaire.* Ce dernier phénomène a lieu quand le mouvement, de direct qu'il était, devient rétrograde, et réciproquement. Les planètes, quoique tournant réellement autour du Soleil d'occident en orient, nous présentent ces diverses apparences.

La droite, qui est la commune section de l'équateur et de l'écliptique, se nomme *ligne des équinoxes :* elle est ainsi désignée, parce que, quand le Soleil se trouve à l'une de ses extrémités, les jours sont égaux aux nuits.

L'écliptique étant partagée en deux parties égales par l'equateur, il s'ensuit que les six premiers signes se trouvent dans l'hémisphère boréal, et les six autres dans l'hémisphère austral. Les signes septentrionaux sont donc le Bélier, le Taureau, les Gémeaux, le Cancer, le Lion, la Vierge; et les signes méridionaux, la Balance, le Scorpion, le Sagittaire, le Capricorne, le Verseau, les Poissons.

On entend aussi par *signes ascendans* ceux que le Soleil parcourt lorsqu'il s'approche de plus en plus du zénit; et par *signes descendans,* ceux par lesquels il passe en s'éloignant sans cesse de ce

point : ainsi, le Capricorne, le Verseau, les Poissons, le Bélier, le Taureau et les Gémeaux sont les signes ascendans.

7. Pour fixer la position des astres, on les rapporte à l'équateur ou à l'écliptique. Relativement au premier cercle, leur position est connue par leur *ascension droite* et leur *déclinaison*.

La *déclinaison* d'un astre est sa distance à l'équateur, mesurée sur un grand cercle qui passe par son centre et par les pôles du monde; ce cercle de déclinaison est donc perpendiculaire à l'équateur. La déclinaison ne se compte que depuis 0° jusqu'à 90°; il est donc indispensable d'énoncer si elle est boréale ou australe. La distance angulaire d'un astre au pôle se nomme *distance polaire :* celle-ci se compte depuis le pôle boréal jusqu'au pôle austral; elle est donc toujours comprise entre 0° et 180°.

L'*ascension droite* est la distance du point équinoxial du printems au cercle de déclinaison, comptée sur l'équateur de l'ouest à l'est, et depuis 0° jusqu'à 360°.

On détermine aussi la position d'un astre par rapport à l'écliptique, c'est-à-dire au moyen de sa longitude et de sa latitude. Pour cet effet, l'on imagine des grands cercles passant par les pôles de cet orbe solaire : c'est sur ces *cercles de latitude* que se mesure la distance des astres à l'écliptique. La latitude est australe ou boréale selon que l'astre est entre le pôle austral de l'écliptique et ce cercle, ou entre l'écliptique et le pôle boréal.

La *longitude* se mesure sur l'écliptique, et se compte à partir du point équinoxial du printems, depuis 0° jusqu'à 360°; c'est-à-dire comme l'ascension droite, d'occident en orient.

8. Il est évident que la distance angulaire du pôle de l'équateur à celui de l'écliptique situé dans le même hémisphère, est la même que l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur : cette inclinaison se nomme l'*obliquité de l'écliptique*.

Les cercles polaires sont des petits cercles de la sphère céleste, parallèles à l'équateur, et qui passent par les pôles de l'écliptique : il y a par conséquent deux cercles polaires, l'un *antarctique* ou au sud, l'autre *arctique* ou au nord.

La hauteur d'un astre est l'arc de grand cercle compris entre l'horizon et cet astre, et dont le plan passe par le zénit de l'obser-

vateur. L'angle que ce cercle de hauteur ou ce *vertical* fait avec le méridien, est dit l'*azimut* de l'astre. Le grand cercle qui passe par le zénit et par le point est ou ouest, se nomme *premier vertical;* celui-ci est donc perpendiculaire au méridien du lieu.

L'*amplitude ortive* est l'arc de l'horizon compris entre l'équateur et le point où un astre se lève; l'*amplitude occasale* est un arc pareil correspondant au coucher de cet astre.

Ainsi, d'après la figure 1, l'arc *ZM* est le premier vertical, et *Mn* l'amplitude ortive d'un astre qui décrit le parallèle *AnB*.

Les étoiles décrivant chacune perpétuellement le même parallèle, il s'ensuit que l'amplitude ortive et l'amplitude occasale restent constantes. Il n'en est pas de même pour le Soleil, puisque, par l'effet de son mouvement propre d'occident en orient, il ne demeure qu'un instant dans l'équateur.

On désigne quelquefois par le nom de *colure* les cercles de déclinaison, notamment ceux qui passent par les points équinoxiaux et solsticiaux : nous parlerons de ces derniers points dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III.

Suite du mouvement propre du Soleil; de la mesure du tems et de la durée des saisons, etc.

9. En comparant, comme nous l'avons déjà dit, à l'aide d'une bonne pendule sidérale, les passages du Soleil au méridien à ceux d'une étoile fixe, on reconnaît que le Soleil y repasse la seconde fois 4 minutes plus tard environ que l'étoile, et que sa marche d'occident en orient est plus ou moins rapide.

Pour avoir une idée plus précise de l'irrégularité du mouvement de cet astre, soit $A \Upsilon P \simeq$ (fig. 2) l'écliptique, AP le grand axe de cette ellipse, C le centre, T la Terre placée au foyer; et supposons que Υ soit le point o du Bélier, ou celui où se trouve le Soleil à l'équinoxe de printems; alors $\simeq$ sera le point o de la Balance, ou l'équinoxe d'automne, et les deux autres points ☋, ☊ qui se trouvent sur une droite perpendiculaire à la ligne des équinoxes, seront les *solstices* d'été et d'hiver.

L'extrémité P du grand axe de l'ellipse solaire se nomme le *périgée*, et l'autre extrémité A l'*apogée;* parce que quand le Soleil est en P, il est le plus près possible de la Terre; et quand il est en A, il se trouve à sa plus grande distance. L'axe AP se nomme la ligne des *apsides;* cette ligne partage évidemment l'écliptique en deux parties égales et symétriques : aussi le Soleil met-il le même tems pour parcourir ces deux parties de sa course annuelle, dans la supposition toutefois de l'immobilité de la ligne des apsides; mais avec cette différence que son mouvement se retarde de plus en plus en allant du périgée P au point A de l'apogée, et qu'il s'accélère suivant la même loi, en partant de ce dernier point pour retourner au périgée. La ligne tirée du centre de la Terre à celui du Soleil, ou le *rayon vecteur* de cet astre, décrit, par le mouvement dont il s'agit, des aires qui sont constamment proportionnelles au tems (*Traité de Mécanique* de M. Poisson, tome I, page 353).

On a déterminé les variations du rayon vecteur en mesurant le diamètre apparent du Soleil, à différentes époques de l'année; et pour

connaître la position de cet astre sur son orbite, on a observé sa longitude. En effet, il est évident que nous devons voir le diamètre du Soleil sous un angle d'autant plus grand ou plus petit, que cet astre est plus près ou plus éloigné de nous : aussi au solstice d'hiver le diamètre paraît-il sous l'angle de 32′34″, et au solstice d'été sous l'angle de 31′32″. C'est par des observations de ce genre qu'on a pu reconnaître la forme elliptique de l'orbe solaire, et la position de la ligne des apsides à l'égard de celle des équinoxes. A l'époque actuelle, la longitude du périgée, ou l'angle ♈*AP*, est de 9ˢ 9° 46′ environ. Or, si à la ligne des équinoxes ♈♎, on élève dans le plan de l'écliptique, et par le centre *T* de la Terre, la perpendiculaire ♋♑; les points ♋, ♑ seront ceux où le Soleil arrivera aux solstices d'été et d'hiver. On voit, à l'inspection de la figure, et d'après la connaissance du mouvement elliptique, que les quatre arcs ♈♋, ♋♎, ♎♑, ♑♈, décrits successivement par le Soleil, sont inégaux; d'où résulte nécessairement une différence dans la durée des saisons.

En effet, la durée du printems est de . . . . 92ʲ 21ʰ $\frac{7}{10}$
celle de l'été, de. . . . . 93.13 $\frac{6}{10}$
celle de l'automne, de. . . . 89.16 $\frac{5}{10}$
celle de l'hiver, de. . . . . 89. 2 0.

10. Les *tropiques* sont des cercles parallèles à l'équateur, et passant par les deux points de l'écliptique les plus éloignés de cet équateur; ainsi l'un est le tropique du Cancer, décrit par le Soleil le premier jour du solstice d'été; l'autre, le tropique du Capricorne, décrit le premier jour du solstice d'hiver.

Il est aisé de concevoir que lorsque le Soleil se trouve à l'un des tropiques, sa déclinaison est précisément égale à l'obliquité de l'écliptique, et la plus grande possible. Si donc, l'on mesure à ces deux époques les hauteurs méridiennes du Soleil, leur demi-somme sera la hauteur de l'équateur sur l'horizon; et si de la plus grande hauteur solsticiale on retranche cette hauteur de l'équateur, le reste sera la déclinaison solsticiale ou l'obliquité de l'écliptique. A l'époque où le Soleil est au solstice d'été, sa longitude est évidemment de 3ˢ ou de 90° : elle est au contraire de 9ˢ ou de 270° lorsque le Soleil est au solstice d'hiver.

La hauteur de l'équateur étant connue, son complément à 90° est la hauteur du pôle sur l'horizon; car l'axe du monde est perpendiculaire au plan de l'équateur. *Voyez* la figure 1.

11. Le jour solaire est le tems qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien supérieur ou au méridien inférieur. Ce jour se divise en 24 heures : on le nomme aussi *jour astronomique* ou *jour vrai*, et on lui donne pour origine l'instant du midi. Si au contraire on prend l'instant du minuit pour origine du tems, on le nomme *jour vrai civil*. Les astronomes procèdent de l'une et de l'autre manière; mais l'usage commence à s'établir parmi eux pour compter de préférence les 24 heures d'un minuit à l'autre. Dans la vie civile, le jour se divise en deux fois douze heures; ainsi, par exemple, le 6 janvier à 9 heures du matin, *tems civil*, répond au 5 janvier à 21 heures, *tems astronomique*.

Les astronomes ont jugé convenable aussi de choisir, pour origine du jour sidéral, l'instant où le point équinoxial du printems passe à leur méridien supérieur : ainsi la pendule sidérale doit toujours marquer $0^h 0' 0''$ ou 12 heures, lorsqu'une étoile qui a zéro d'ascension droite se trouve dans le méridien. En général elle doit marquer l'ascension droite d'une étoile quelconque, convertie en tems, à raison de 15° pour une heure, au moment où l'étoile traverse le méridien supérieur.

Les jours astronomiques ne sont pas tous égaux entre eux comme les jours sidéraux; ils sont plus longs que ceux-ci de plusieurs minutes, comme nous l'avons déjà fait observer; car lorsqu'une étoile et le Soleil se trouvent en même tems au méridien un certain jour, le lendemain le Soleil, en vertu de son mouvement propre d'occident en orient, passe au méridien plus tard que l'étoile, et après avoir décrit environ $59' 8'',33$ de degré de son orbite. Par conséquent, dans l'espace d'une année, le Soleil traverse le méridien une fois de moins que l'étoile.

Nous venons de dire que les jours astronomiques ne sont pas égaux; leurs différences résultent à la fois de l'obliquité de l'écliptique, et de ce que le mouvement propre ou apparent du Soleil n'est pas uniforme; car d'une part il est visible que si, par plusieurs points équidistans de l'écliptique, on fait passer des cercles de déclinaison, les arcs de l'équateur compris entre ces cercles, ou les différences d'ascension droite seront en général inégales entre elles. Ainsi l'inégalité des jours solaires aurait lieu, quand même le Soleil décrirait uniformément l'écliptique : mais d'autre part cet astre a un mouvement irrégulier dans son orbite; donc les jours vrais astronomiques ne peuvent être égaux.

Concluons de là que les oscillations du pendule ou balancier d'une bonne horloge étant *isochrones* ou d'égale durée, peuvent bien être réglées sur le mouvement diurne des étoiles, mais non pas sur la marche réelle du Soleil. Cependant en faisant abstraction des inégalités de cette marche, on peut mieux dire, en supposant qu'un autre Soleil décrive uniformément l'équateur en vertu d'un moyen mouvement propre d'occident en orient, l'intervalle de tems entre deux retours consécutifs au méridien formera un *jour moyen astronomique* entre tous les jours vrais ou apparens, et l'horloge qui suivra exactement le mouvement uniforme de ce Soleil fictif sera réglée sur le *tems moyen*.

Le jour moyen se divise en 24 heures : tous les jours moyens sont donc égaux.

12. Pour parvenir au but que l'on vient d'indiquer, les astronomes ont d'abord imaginé qu'un second Soleil décrivait uniformément une écliptique circulaire circonscrite à la véritable orbite, et cela dans le même tems que le vrai Soleil décrivait cette orbite. Ils ont en outre supposé que ces deux Soleils partaient ensemble du périgée. Enfin ils ont imaginé qu'un troisième Soleil partait d'un des points équinoxiaux, à l'instant même où le second Soleil y arrivait, et qu'il décrivait uniformément l'équateur d'occident en orient dans le même tems que le second Soleil parcourait son cercle. On conçoit, d'après cette hypothèse, que l'ascension droite du troisième Soleil, qu'on nomme *ascension droite moyenne*, est toujours égale à la longitude du second Soleil ou à la *longitude moyenne*, et que l'un est sans déclinaison comme l'autre est sans latitude. La longitude moyenne croît donc proportionnellement au tems. C'est d'après ce principe que les tables du Soleil donnent les longitudes moyennes pour tous les jours de l'année.

La distance angulaire du périgée au vrai Soleil se nomme *anomalie vraie*; elle est mesurée par l'angle que le rayon vecteur solaire fait avec la ligne des apsides. La distance angulaire du périgée au second Soleil s'appelle *anomalie moyenne*, et enfin la différence de ces deux anomalies est l'*équation du centre*. La longitude vraie du Soleil est donc égale à la longitude du périgée augmentée de l'anomalie vraie, et la longitude moyenne est égale à la longitude du périgée plus l'anomalie moyenne. On voit en outre que la lon-

gitude vraie du Soleil est égale à la longitude moyenne plus ou moins l'équation du centre ou de l'orbite.

13. Nous avons dit précédemment que le nombre des retours au méridien, du Soleil fictif situé sur l'équateur, mesure le tems moyen, et que le nombre pareil des retours du vrai Soleil mesure le tems vrai. L'arc de l'équateur compris entre deux méridiens menés par les centres de ces deux Soleils, est ce qu'on nomme l'*équation du tems*. Cette équation est toujours évaluée en fraction de jour moyen; elle est nulle quatre fois dans l'année, et se trouve toute calculée pour chaque jour dans les éphémérides: par exemple, on la trouve pour tous les jours du mois, et sous le titre de *tems moyen au midi vrai*, dans la *Connaissance des Tems* que le Bureau des Longitudes publie chaque année : elle sert à faire connaître si une pendule à secondes est bien réglée sur le tems moyen, comme on le verra par la suite.

Le second Soleil dont nous venons de parler, détermine, par ses retours à l'équateur et aux tropiques, les équinoxes et les solstices moyens. La durée de ses retours au même équinoxe ou au même solstice forme l'*année tropique*, laquelle, selon les calculs les plus exacts, est de $365^j,2422640 = 365^j\ 5^h\ 48'\ 51'',6$ tems moyen (*Astronomie* de M. Delambre, tome II, page 246).

14. L'observation a fait connaître que la ligne des équinoxes n'est pas fixe dans le ciel à l'égard des étoiles; on lui a reconnu un mouvement angulaire rétrograde ou contraire au mouvement propre du Soleil, qu'on a évalué de nos jours à environ $50'',1$ par an, mais qui n'est pas exactement le même dans tous les siècles; c'est ce qui fait que les années tropiques sont un peu inégales. Ainsi le Soleil, pour revenir aux étoiles d'où il était parti, met un peu plus de tems que pour revenir à l'équinoxe. L'*année sidérale* étant l'intervalle compris entre deux retours consécutifs aux mêmes étoiles, il s'ensuit qu'elle est plus longue que l'année tropique de $20'\ 20''$; sa valeur est de $365^j,256384$. Enfin on a remarqué que le point du périgée a un mouvement direct de $12''$ par an dans le plan de l'orbe solaire; et la théorie de l'attraction universelle a appris que l'excentricité de cet orbe diminue peu à peu. L'*année anomalistique* étant l'intervalle compris entre deux passages consécutifs au périgée, est

donc elle-même un peu plus longue que l'année sidérale. Sa valeur est de $365^j,259709 = 365^j\ 6^h\ 13'\ 58'',8$.

On doit conclure de là que la ligne des apsides coïncidera un jour avec celle des équinoxes, ou lui sera perpendiculaire; puisque le périgée a, par rapport au point o d'*Aries*, un mouvement relatif et annuel de 62''. Ainsi les durées des saisons, telles qu'elles sont données à l'art. 9, éprouveront à la longue des changemens sensibles.

C'est encore l'observation qui a constaté un fait remarquable, savoir, que l'orbe solaire se rapproche peu à peu de l'équateur, ou, ce qui est de même, que l'obliquité de l'écliptique diminue insensiblement. Cette diminution séculaire est à très peu près de 50''; mais la théorie montre que l'écliptique et l'équateur ne se confondront jamais. Indépendamment de ces variations fort lentes, il en est d'autres qui ont une période beaucoup plus courte, et dont nous parlerons par la suite. Toutes ces variations ou inégalités qui troublent le mouvement elliptique du Soleil, sont connues en Astronomie sous le nom de *perturbations planétaires;* parce qu'elles résultent de l'action que les planètes exercent sur le Soleil en vertu de la gravitation universelle. Il faut nécessairement y avoir égard pour déterminer le lieu vrai de cet astre avec toute la précision possible; or elles s'évaluent aisément à l'aide des nouvelles tables solaires dont nous ferons connaître l'usage plus tard.

Remontant aux valeurs ci-dessus de l'année moyenne et de l'année sidérale, on trouve, en prenant pour unité de tems le *jour moyen astronomique*, que la durée du jour sidéral est de $0^j,99726967 2 = 23^h\ 56'\ 4'',09070$; d'où il suit que l'accélération diurne des étoiles est de 3' 55'',9093 par rapport au moyen mouvement du Soleil.

En prenant au contraire le jour sidéral pour unité, le jour moyen solaire est exprimé par $1^j,0027379097 22 = 24^h\ 3'\ 56'',5554$; ainsi lorsqu'on aura des heures moyennes solaires à convertir en heures sidérales, ce qui se pratique très souvent en Astronomie, il faudra augmenter les premières de 9'',8568, ou simplement de 10'', si l'on juge cette exactitude suffisante. Réciproquement pour convertir des heures sidérales en heures moyennes, on retranchera 9'',8292 de chacune des premières.

Il résulte de là que le Soleil moyen achève sa ré intière, ou parcourt 360° en $24^h\ 3'\ 56'',5554$ de tems sid dans

le même tems le mouvement de la sphère étoilée est de 360° 59′ 8″,33 : ainsi les jours moyens sont aux jours sidéraux dans le rapport de $\frac{360° 59' 8'',33}{360}$. Dans une heure solaire moyenne, une étoile fixe décrit par conséquent un arc de 15° 2′ 27″,847 ; ainsi dans une seconde de tems moyen elle parcourt 15″,04107 de degré.

Il s'ensuit en outre que, dans un jour moyen, le mouvement propre du soleil moyen est de 59′ 8″,33, et que ce Soleil ne parcourt que 359° 59′ 9″,9 dans une année tropique, puisque la rétrogradation des points équinoxiaux est de 50″,1.

De l'Année civile et du Calendrier grégorien.

15. C'est sur l'année tropique que se règle l'année civile : celle-ci est tantôt de 365 jours, tantôt de 366, et commence au minuit qui sert d'origine au premier janvier; quoiqu'il eût été à désirer que les peuples de notre hémisphère eussent pris pour époque, soit l'équinoxe du printems, soit le solstice d'hiver. Pour concevoir pourquoi la durée de l'année civile est variable, il suffit de remarquer que si elle était constamment de 365 jours, son commencement devancerait sans cesse celui de la véritable année tropique, et parcourrait par conséquent les différentes saisons en rétrogradant. Cet inconvénient, qui ferait évidemment perdre au calendrier un de ses principaux avantages, celui de fixer les mois et les fêtes aux mêmes saisons, et d'en faire de cette manière des époques remarquables pour l'agriculture, s'élude à l'aide de l'intercallation suivante, adoptée dans le calendrier grégorien, qui est celui dont la plupart des peuples de l'Europe font usage.

Au tems de Jules-César les années étaient bissextiles tous les quatre ans, c'est-à-dire de 366 jours; et l'année tropique, supposée de 365 jours un quart seulement, fut nommée l'*année julienne*. Le tems qui s'écoule pendant cent années juliennes forme la durée d'un siècle, la plus longue des périodes usitées dans la Chronologie. Mais cette intercallation d'un jour tous les quatre ans, pour compenser l'erreur résultant de la suppression d'un quart de jour dans les années communes ou de 365 jours, ne pouvait remédier à l'inconvénient qu'on voulait éviter, lorsque l'on sut que l'année tropique était plus exactement de 365j,242264 ou à fort peu près; il

fallut donc, pour empêcher le déplacement de l'origine de l'année civile, tenir compte de $0^j,007736$ dont l'année tropique était augmentée par ce mode régulier d'intercallation. Or, en 1582, sous le pontificat de Grégoire XIII, l'on y parvint en convenant de supprimer la bissextile à la fin de chaque siècle, pour la rétablir à la fin du quatrième; et, dans ces derniers tems, M. Delambre a proposé de la supprimer tous les quatre mille ans. De là ces deux règles pour savoir si une année grégorienne est bissextile ou non. 1°. Si le nombre qui exprime l'année est divisible exactement par 4, cette année est bissextile; mais si la division ne se fait pas sans reste, l'année est commune : ainsi l'année 1813 a été commune, et l'année 1816 bissextile. 2°. Quant aux années séculaires, supprimez les deux zéros du nombre qui les exprime, et si ce nombre ainsi réduit est exactement divisible par 4, ces années ont été ou seront bissextiles. Par exemple, les années séculaires 1700 et 1800 ont été communes, il en sera de même de l'année 1900; mais l'année 2000 sera bissextile : toutefois l'année 4000 sera commune par la raison donnée ci-dessus. (*Voyez*, pour de plus amples explications, le *Traité de la Sphère et du Calendrier*, par Rivard, 7e édition.)

Les Russes s'en tiennent toujours à la réforme julienne ou au *vieux style;* aussi comptent-ils maintenant 12 jours de moins que nous. Quant aux Turcs, ils règlent l'année sur le mouvement de la Lune.

CHAPITRE IV.

De la rondeur de la Terre, de son atmosphère, et de la réfraction astronomique.

16. Les premiers voyageurs durent s'apercevoir bientôt que la surface de la Terre n'est pas ce qu'elle semble d'abord, un plan sur lequel le ciel s'appuie sous la forme d'une voûte surbaïssée; qu'elle est au contraire, comme nous l'avons supposé, un corps à très peu près sphérique que le ciel enveloppe de toutes parts. En effet, à mesure que l'on s'avance vers le midi ou vers le nord, des étoiles qui demeuraient constamment sous l'horizon se lèvent et se couchent alternativement, tandis que d'autres qui étaient visibles disparaissent pour toujours. Il est vraisemblable en outre que les dimensions de la Terre ont été connues dès la plus haute antiquité, sinon très exactement, du moins à fort peu de chose près; car il existe entre plusieurs mesures de ces tems reculés et la longueur de la circonférence terrestre, des rapports qui donnent lieu de penser ainsi. Cette circonférence est de quarante millions de mètres.

17. Un fluide élastique, rare et transparent, qu'on nomme l'*air*, entoure le globe terrestre de tous côtés, et s'élève à une grande hauteur. Son poids fait équilibre à celui du mercure dans le baromètre. Tout ce fluide, éminemment nécessaire à notre existence, forme l'atmosphère : il a la propriété de se condenser par le froid et de se dilater par la chaleur. A mesure que l'on se transporte dans les régions élevées de l'atmosphère, l'air devient plus rare; et à cause de sa compressibilité, ses couches inférieures sont plus denses que ses couches supérieures dont elles supportent le poids. A une température constante sa densité est proportionnelle au poids qui le comprime, et par conséquent à la hauteur du baromètre. De cette propriété résulte la possibilité de mesurer les hauteurs par les observations barométriques.

Nous ne voyons donc les astres qu'à travers un fluide. Souvent

même nous les voyons ailleurs que là où ils sont réellement, par suite de la déviation qu'éprouvent leurs rayons lumineux en traversant l'atmosphère; car il est de fait que la lumière, en passant obliquement d'un milieu dans un autre dont la densité est différente, change de direction, en s'approchant de la perpendiculaire à leur surface commune, au point où elle entre dans le milieu le plus dense. C'est cet effet qu'on nomme *réfraction*. Le rayon direct et le rayon réfracté forment, avec cette perpendiculaire, deux angles, dont l'un est l'angle d'incidence et l'autre l'angle de réfraction : or, les sinus de ces deux angles sont toujours dans un rapport constant. L'expérience prouve aussi que la réfraction des rayons sur une même surface croît avec leur obliquité, et que la force réfreingente de l'air est proprotionnelle à sa densité, ou bien à la pression qu'il éprouve.

La densité des couches d'air augmentant progressivement depuis les limites de l'atmosphère jusqu'à la surface de la Terre, il s'ensuit qu'un rayon lumineux qui traverse obliquement toutes ces couches supposées sphériques, concentriques, en équilibre et d'une épaisseur infiniment petite, arrive à nous en suivant une courbe concave vers la surface terrestre; mais comme nous supposons toujours les objets sur la direction même des rayons que nous en recevons, nous rapportons les astres au point du ciel qui se trouve sur la tangente à la courbe ou *trajectoire* décrite par le rayon lumineux, au point où nous sommes. La réfraction est donc l'angle que cette tangente fait avec la droite menée de notre œil au lieu réel de l'astre.

18. On conçoit, par l'explication succincte de ce phénomène, lequel paraît être dû à l'action que les corps exercent sur la lumière, que la réfraction astronomique ou plutôt *atmosphérique* est la plus grande possible, lorsque les astres sont à l'horizon; qu'elle diminue à mesure qu'ils s'élèvent au-dessus de ce plan, et qu'elle est nulle lorsque les astres passent au zénit.

L'effet de la réfraction est donc de faire paraître les astres plus élevés qu'ils ne le sont effectivement, et n'a lieu que dans le sens vertical. Ainsi, la hauteur angulaire d'un astre observé de la surface de la Terre, est une hauteur *apparente;* il faut la diminuer de la réfraction pour avoir la *hauteur vraie.*

Il résulte de là que la valeur de la réfraction dépend de la hauter

apparente d'un astre, ou, comme l'on dit, a pour *argument* cette hauteur apparente.

La réfraction au-dessus de dix degrés de hauteur, toutes choses d'ailleurs égales, ne dépend sensiblement que de l'état du baromètre et du thermomètre dans le lieu de l'observation. Les géomètres, M. Laplace particulièrement, en ont assigné les lois; mais à une hauteur plus petite, et à l'horizon sur-tout, elle éprouve des variations très irrégulières et tout-à-fait inexplicables. Nous reviendrons ailleurs sur ce sujet.

CHAPITRE V.

Du mouvement de la Terre autour du Soleil; des longitudes et latitudes géographiques, et des différentes parallaxes des astres.

19. Dans tout ce qui précède sur le système du monde, le Soleil est supposé en mouvement autour de la Terre; mais il est très probable que ce mouvement n'est qu'apparent, et n'est dû qu'à une illusion optique semblable à celle qu'éprouve un voyageur, lorsque, entraîné par le courant d'un fleuve, il fixe les rivages, et leur attribue un mouvement contraire à celui par lequel il est emporté réellement. En effet l'hypothèse la plus simple, est d'admettre que la Terre tourne sur elle-même d'occident en orient en 24 heures sidérales, et autour du Soleil dans l'espace d'un an, en décrivant un orbe dont le centre du Soleil occupe un des foyers; mais, dans l'une comme dans l'autre supposition, les apparences des mouvemens célestes sont les mêmes.

La Terre décrit donc l'écliptique dans le sens même du mouvement apparent du Soleil, c'est-à-dire d'occident en orient. Ainsi, quand le Soleil nous paraît, par exemple, au point équinoxial du printems, la Terre est réellement au point opposé, ou à celui d'automne. Cela posé, si, par le centre S du Soleil (fig. 3), on conçoit à la ligne des équinoxes $T\Upsilon$ une parallèle $S\Upsilon'$, le point Υ' sera celui d'où l'on comptera la longitude $\Upsilon' T$ de la Terre. Mais comme un observateur en T, rapporte le Soleil S en un point S' de l'orbite terrestre, il s'ensuit que la longitude *géocentrique* du Soleil, ou vue de la Terre, est de 180° plus grande que la longitude *héliocentrique* $\Upsilon' T$ de la Terre, ou vue du Soleil; ce qui s'exprime ainsi :

$$\text{long.} \odot = \text{long.} \oplus + 180^\circ,$$

c'est-à-dire longitude Soleil = longitude de la Terre + 180°.

On entend par *périhélie* le point où la Terre est le plus près du

Soleil, et par *aphélie* celui où elle en est le plus éloignée. Ces deux points, qui forment les extrémités du grand axe de l'orbite terrestre, sont respectivement P, A. Si donc ϖ et Π sont l'un la longitude du périhélie, l'autre celle du périgée, l'on aura

$$\Pi = \varpi + 180^\circ.$$

20. En considérant toujours la Terre comme une sphère, tous les points de sa surface, dans leur mouvement diurne autour de l'axe du monde, décrivent des cercles parallèles entre eux, lesquels, comme dans la sphère céleste, sont nommés *parallèles*, lorsqu'ils sont inégalement éloignés des pôles. L'équateur terrestre est donc le cercle dont le plan coïncide avec celui de l'équateur céleste et partage la surface du globe en deux hémisphères, qui ont pour centre l'un le pôle boréal, l'autre le pôle austral. Ces deux pôles sont nécessairement situés sur l'axe du monde, et correspondent par conséquent à ceux de la sphère céleste.

Le méridien d'un lieu est de même le cercle qui passe par ce lieu et par les pôles de la Terre. Le premier méridien est celui auquel on est convenu de rapporter tous les autres. Anciennement, et depuis Ptolémée, les géographes prenaient pour premier méridien celui qui passe par l'île de Fer, l'une des plus occidentales des îles Canaries. Cet usage s'introduisit en France sous le règne de Louis XIII; mais plus tard les géographes français se décidèrent, à l'instar de l'Académie des Sciences de Paris, à compter les longitudes du méridien de l'Observatoire royal.

L'angle que forme deux méridiens est mesuré par l'arc de l'équateur qu'ils interceptent. Cet arc se nomme *longitude terrestre* ou *différence des méridiens*, en tant que l'un des méridiens est ou n'est pas considéré comme le premier. La longitude se compte sur l'équateur, de part et d'autre du méridien, et peut conséquemment être orientale ou occidentale; elle se compte aussi dans le sens du mouvement de rotation de la Terre, c'est-à-dire d'occident en orient, et depuis 0° jusqu'à 360°; cela est indifférent pourvu qu'on en avertisse.

Il suit de là, et de ce qui a été dit (art. 11), que lorsqu'il est midi vrai au méridien de Paris, par exemple, il n'est que 11^h, tems vrai, au méridien d'un autre lieu dont la longitude occidentale, par rapport à cette ville, est de 15°. Au contraire, il est une heure après midi dans un lieu situé à l'orient de Paris, et dont la longitude orientale

est de même de 15°. Ce que nous disons du tems vrai doit s'entendre aussi du tems moyen et du tems sidéral.

21. Sur la Terre sphérique, la plus courte distance de deux points est déterminée par l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points, et la distance d'un lieu à l'équateur est l'arc du méridien de ce lieu, compris entre son parallèle et la ligne équinoxiale ou l'équateur terrestre; c'est cette dernière distance que l'on nomme *latitude géographique*, ou simplement latitude : il est nécessaire d'indiquer si elle est australe ou boréale.

La latitude d'un lieu est égale à la hauteur du pôle sur l'horizon du même lieu; car la latitude et la hauteur du pôle ont l'un et l'autre pour complément au quart du méridien, la distance de ce lieu au pôle élevé.

Quelle que soit la figure de la Terre, la latitude géographique d'un lieu, ou la *hauteur apparente* du pôle, est l'angle que la normale à la surface terrestre en ce lieu fait avec le plan de l'équateur. La surface de la Terre diffère peu de celle d'un ellipsoïde de révolution, dont l'axe de rotation représente celui des pôles, comme on le verra par la suite. Ainsi, la latitude géographique du point A (fig. 4), situé entre le pôle P et le point E de l'équateur, a pour mesure l'angle ALE que la normale AN à l'ellipse génératrice PAE, ou au méridien de A, fait avec le rayon CE de l'équateur. Cette normale, prolongée dans le ciel, détermine le zénit Z apparent, tandis que le rayon terrestre CA prolongé également, détermine le zénit vrai Z', ou le zénit géocentrique. Dans la nature, l'angle de la verticale ou normale AN, avec le rayon AC, est toujours très petit; néanmoins, il est des cas où il faut en tenir compte. Cet angle est évidemment la différence entre la latitude apparente ALE, et la latitude géocentrique ACE; puisque, par la propriété de l'angle extérieur au triangle CLA, l'on a angle ALE = angle ACE + angle CAL.

De même qu'un point est donné sur un plan par ses distances à deux droites fixes, de même aussi la position d'un lieu sur la terre est déterminée par sa longitude et sa latitude. La Géographie mathématique est toute fondée sur la détermination de ces deux coordonnées.

22. Les plans des cercles polaires de la sphère céleste déterminent, par leurs intersections avec la surface de la Terre, deux cercles

correspondans de même dénomination ; il en est ainsi des tropiques. La zône comprise sur la Terre entre les deux tropiques, forme la *zône torride,* parce que les peuples qui l'habitent, ayant pendant deux fois l'an le Soleil d'aplomb sur leurs têtes, éprouvent une chaleur excessive. Les deux zônes comprises entre les tropiques et les cercles polaires, forment les *zônes tempérées* ou plus douces ; et enfin les deux parties restantes de la surface terrestre composent les *zônes glaciales.*

Les peuples situés sur l'équateur ont la *sphère droite,* parce que l'axe du monde étant alors dans le plan de leur horizon, toutes les étoiles décrivent des cercles perpendiculaires à ce plan ; mais entre l'équateur et le pôle élevé, ils ont la *sphère oblique :* c'est le cas de la figure 1. Ceux qui seraient aux pôles mêmes auraient la *sphère parallèle,* parce que l'équateur serait parallèle à l'horizon des pôles : dans ce cas, les étoiles ne se lèvent ni ne se couchent jamais, puisqu'elles décrivent toutes des cercles parallèles à cet horizon. En général, ces derniers cercles se nomment des *almicantarats.*

Il est bien aisé de se rendre compte des différentes longueurs des jours et des nuits à diverses époques de l'année, eu égard à ces trois positions de la sphère.

23. La distance qui nous sépare des étoiles est si grande, que les droites menées de l'une d'elles aux centres de la Terre et du Soleil, ne feraient aucun angle sensible ; c'est cet angle que les astronomes désignent sous le nom de *parallaxe annuelle* ou du grand orbe : les étoiles, même les plus brillantes, n'ont pas de parallaxe. Il n'en est pas ainsi des planètes, et l'on s'est même assuré que l'angle sous lequel on verrait de leur centre le demi-diamètre terrestre, est de plusieurs secondes.

Supposons, par exemple, un observateur en A, (fig. 5) sur la surface de la Terre sphérique, et considérons le Soleil S à l'horizon sensible AS : la *parallaxe horizontale* de cet astre sera ASC ; mais si le Soleil est élevé sur l'horizon, comme en S', l'angle $AS'C$ sera la *parallaxe* de hauteur, laquelle est évidemment plus petite que la première, en supposant que SS' fasse partie de l'arc diurne, ou de celui que le Soleil décrit pendant sa présence sur l'horizon. Ainsi, la parallaxe de hauteur décroît progressivement depuis l'horizon où elle est à son *maximum,* jusqu'au zénit où elle est nulle. Son effet est tout entier

dans un plan vertical, et contraire à celui de la réfraction (art. 18), puisque nous voyons un astre moins élevé que si nous étions au centre de la Terre, et cela d'une quantité égale à la parallaxe.

La Terre s'éloignant ou se rapprochant continuellement du Soleil, il est évident que la parallaxe horizontale solaire n'a pas une valeur constante; sa valeur moyenne est de 8″,5. La parallaxe de la Lune est bien plus grande, puisqu'elle est quelquefois de plus d'un degré.

24. Dans le cas de la Terre elliptique, il ne faut pas toujours confondre la parallaxe horizontale avec la plus grande parallaxe de hauteur, comme cela était permis dans l'hypothèse précédente. En effet, pour un observateur en A (fig 6) sur le méridien elliptique PA, la parallaxe horizontale de l'astre S est l'angle S du triangle obliquangle ASC formé par l'horizontale ou tangente AS, le rayon CA de la Terre au point A et la distance CS. Or, en supposant l'astre en S' au-dessous de l'horizon, et à l'extrémité de la droite AS' perpendiculaire au rayon AC, l'angle S' sera la plus grande parallaxe de hauteur, relativement à une sphère du rayon dont il s'agit : l'angle S est donc en général plus petit que S'. Cependant il est des astronomes qui, en parlant dans leurs écrits de la parallaxe horizontale, veulent désigner l'angle S'. Lorsque le lieu A de l'observateur est sur l'équateur même, la parallaxe horizontale, qui est aussi la plus grande parallaxe de hauteur, se nomme *parallaxe équatoriale.*

25. Indépendamment des parallaxes dont nous venons de parler, il en est d'autres qu'il est utile de connaître; ce sont les parallaxes d'ascension droite et de déclinaison, celles de longitude et de latitude: celles-ci n'existeraient pas, si la plus grande parallaxe de hauteur était nulle. Toutes résultent de ce que le rayon terrestre est comparable à la distance de la Terre à l'astre, ou, ce qui revient au même, de ce que deux observateurs, l'un placé au centre C de notre globe, (fig. 7) l'autre à la surface A, ne rapporteraient pas un astre, la Lune L par exemple, au même point du ciel. Le lieu L'' d'un astre L vu du centre C de la Terre s'appelle le *lieu vrai,* et le lieu L' vu de la surface terrestre, se nomme le *lieu apparent.*

Il résulte de là que ces deux lieux étant distincts sur la sphère céleste, l'ascension droite et la déclinaison vraies, ou la longitude et la latitude vraies diffèrent en général de l'ascension droite et de la déclinaison apparentes.

La parallaxe de déclinaison est la différence entre la déclinaison vraie et la déclinaison apparente; il en est de même de la parallaxe d'ascension droite ou d'*angle horaire,* et des autres parallaxes. En effet, soit Υ le point équinoxial du Bélier, $\Upsilon l'' l'$ l'équateur et P le pôle. Si, par le lieu vrai L'' et le lieu apparent L' de l'astre L, on conçoit deux cercles de déclinaison $PL''l''$, $PL'l'$, l'arc $\Upsilon l''$ de l'équateur sera l'ascension vraie, et l'arc $\Upsilon l'$ l'ascension droite apparente; et d'après la définition ci-dessus, $l''l'$, mesure de l'angle sphérique $l''Pl'$, sera la parallaxe d'ascension droite ou d'angle horaire. De même l'arc $l''L''$ représentant la déclinaison vraie, tandis que $l'L'$ représente la déclinaison apparente, il suit de là que la différence de ces deux arcs sera la parallaxe de déclinaison. Enfin, Z étant le zénit du lieu A, et l'arc $ZL''L'$ le vertical de l'astre L, l'angle $L'LL''$ sera la parallaxe de hauteur, et l'angle PZL'' l'azimut de l'astre dont il s'agit, puisque ZP est le méridien du lieu A.

26. Maintenant, si l'on considère l'arc céleste $\Upsilon l'' l'$ comme l'écliptique, et P comme le pôle de ce cercle, la plupart des dénominations précédentes changeront nécessairement; car on voit bien que les ascensions droites seront des longitudes, et les déclinaisons des latitudes : ainsi la parallaxe d'ascension droite prendra le nom de parallaxe de longitude, et la parallaxe de déclinaison, le nom de parallaxe de latitude. Les étoiles sont dépourvues de toutes ces espèces de parallaxes.

27. A la rigueur, le rayon terrestre CA prolongé dans le ciel, ne se confondant pas toujours avec la verticale du point A, il existe aussi par cette raison deux sortes d'azimut : l'un est l'azimut vrai, qui est relatif au zénit géocentrique indiqué par le rayon de la Terre; l'autre, l'azimut apparent qui se rapporte au zénit de même dénomination, et qui est le seul qu'on observe; mais nous n'aurons par la suite aucune occasion d'avoir égard à la parallaxe d'azimut.

CHAPITRE VI.

Du mouvement et des phases de la Lune, et de ses principales inégalités.

28. La Terre, en décrivant son orbe autour du Soleil, est accompagnée de son satellite, c'est-à-dire de la Lune, qui, par son mouvement propre d'occident en orient, décrit elle-même une ellipse dont le centre de la Terre occupe un des foyers. L'orbe lunaire est incliné sur l'écliptique de 5° environ, et rencontre cette courbe en deux points opposés qu'on appelle *nœuds* de la Lune; ainsi la ligne des nœuds est la droite qui joint ces deux points. On entend par *nœud ascendant* ☊ celui que traverse la Lune pour entrer dans l'hémisphère boréal ou supérieur; l'autre est le *nœud descendant* ☋.

La Lune n'est point lumineuse par elle-même; elle n'est visible que parce que sa surface a la propriété de réfléchir la lumière qu'elle reçoit directement du Soleil, puisqu'elle s'éclipse quand la Terre est interposée entre elle et cet astre. L'observation répétée des taches fixes et nombreuses qui sont répandues sur son disque, a fait connaître qu'elle nous présente à peu près le même hémisphère; mais les taches qui en avoisinent le bord, tantôt s'en approchent, tantôt s'en éloignent. Ce balancement, qui n'est qu'apparent, se désigne sous le nom très expressif de *libration* : il résulte de ce que la Lune, en parcourant son orbite dans l'espace de $27^j \frac{1}{3}$, ne tourne pas sur elle-même exactement dans le même tems. Ce mouvement de rotation a lieu, comme celui de la Terre, d'occident en orient.

Les astronomes ont reconnu en outre que la Lune n'a pas d'atmosphère sensible; ainsi elle ne peut être habitée par des êtres de notre nature.

29. Les *phases* de la Lune sont les différens aspects sous lesquels elle se présente à nous. Par exemple, elle est *pleine* quand son disque est totalement éclairé; *nouvelle* quand son disque est privé de lumière, et dans ses *quartiers* lorsqu'elle paraît en demi-

cercle. L'explication de ces diverses apparences, ne présente aucune difficulté, si l'on fait attention que la révolution de la Lune, qui a lieu d'occident en orient, s'effectue en beaucoup moins de tems que celle du Soleil dans le même sens; car, en supposant la Terre immobile, le Soleil décrit son orbe en $365^j \frac{1}{4}$ environ, et la Lune au contraire décrit le sien en $27^j \frac{1}{3}$. Il suit de là que si un certain jour la Lune est entre la Terre et le Soleil, c'est-à-dire en conjonction, elle paraîtra bientôt après à l'orient, par rapport à cet astre. Dans sa position primitive, elle répond au même point du ciel que le Soleil, et sa partie éclairée est invisible pour nous; alors elle est nouvelle. Un jour ou deux après la conjonction ☌, la Lune paraît en forme de croissant dont les pointes ou cornes sont tournées vers l'orient. Peu à peu ce croissant s'élargit, parce que la distance angulaire de la Lune au Soleil, ou son *élongation*, augmente de plus en plus. Lorsque cette distance est de 90°, la Lune est dans son premier quartier; et lorsque la Lune se trouve en opposition ☍ avec le Soleil, ou éloignée de lui de 180°, elle est pleine. Ensuite les mêmes phases reparaissent, mais dans un ordre inverse; c'est-à-dire que quand la Lune est, par exemple, éloignée de 270° du Soleil, elle est dans son dernier quartier, et pour lors la partie éclairée de son disque est à l'orient. Ces quatre principales phases se succèdent tous les sept à huit jours, et prouvent que la Lune est un corps sensiblement sphérique.

Observons que les points de conjonction et d'opposition se nomment les *syzygies*, et que les autres points par lesquels passe la Lune, et qui sont à égale distance des syzygies se nomment les *quadratures* □. Quant aux points qui sont à égale distance des syzygies et des quadratures, on les appelle les *octans*.

La partie de cet astre qui est privée de la lumière directe du Soleil, n'est pas cependant tout-à-fait invisible, parce qu'elle est un peu éclairée par les rayons solaires, que la Terre réfléchit : c'est cette lueur qu'on nomme *lumière cendrée*.

Il ne faut pas croire pourtant, d'après ce qui précède, qu'il y ait éclipse de Soleil à chaque conjonction, et éclipse de Lune à chaque opposition; car le premier phénomène ne peut arriver que quand la Lune se trouve précisément entre la Terre et le Soleil, et le second phénomène, que quand la Terre est précisément entre le Soleil et

la Lune, auquel cas celle-ci est plongée en tout ou en partie dans l'ombre de la Terre.

30. Nous avons dit ci-dessus que la Lune, après 27 jours $\frac{1}{3}$ environ, revenait au même cercle de latitude où elle se trouvait à son départ; mais pour qu'elle rejoigne le Soleil il lui faut au moins deux jours de plus. Ainsi il s'écoule 29 jours $\frac{1}{2}$ d'une conjonction à l'autre; c'est là ce qui constitue le *mois synodique* ou une lunaison. Plus exactement ce mois, qui est l'intervalle moyen entre deux nouvelles ou deux pleines Lunes, $= 29^j\, 12^h\, 44'\, 3''$. Le tems que la Lune emploie pour faire sa révolution sidérale d'occident en orient est de $27^j\, 7^h\, 43'\, 12''$; c'est ce qu'on nomme aussi le *mois périodique*. Dans l'usage civil on compte les mois synodiques alternativement de 29 et de 30 jours; or, une année lunaire étant composée de 12 lunaisons, se trouve être de 11 jours plus courte qu'une année solaire commune.

31. La Lune a un mouvement très irrégulier dans son orbite; cela tient à ce que son mouvement elliptique est sans cesse troublé par l'action du Soleil et des planètes environnantes. Les géomètres et les astronomes, malgré leurs efforts, n'ont pu en donner une théorie complette; mais il est des phénomènes qui n'ont point échappé aux observations; par exemple, on a remarqué que les nœuds de l'orbite lunaire ont un mouvement rétrograde irrégulier et très rapide, puisqu'ils parcourent l'écliptique en 18 ans $\frac{1}{2}$ environ.

32. On conçoit bien que pour connaître exactement le lieu de la Lune, c'est-à-dire sa véritable position dans son orbite, il faut d'abord, comme pour le Soleil, considérer son mouvement purement elliptique, et ensuite avoir égard à toutes les inégalités séculaires et périodiques qui affectent ce mouvement. La plus considérable des inégalités périodiques est l'*évection*, qui diminue l'équation du centre dans les syzygies et l'augmente dans les quadratures; elle est proportionnelle au sinus du double de la distance angulaire de la Lune au Soleil, moins l'anomalie moyenne de la Lune; et la période est environ de $31^j\, \frac{8}{10}$. Une autre inégalité assez grande se manifeste dans les syzygies et les quadratures, et est proportionnelle au sinus du double de l'élongation; elle se nomme *variation* : sa

durée est d'une demi-révolution synodique. Enfin le mouvement angulaire de la Lune s'accélère ou se rallentit annuellement, quand le Soleil s'éloigne ou se rapproche de la Terre; ce qui forme une troisième inégalité désignée sous le nom d'*équation annuelle*, laquelle a pour argument l'anomalie moyenne du Soleil : sa période est d'une année solaire anomalistique (art. 14).

A ces trois inégalités très sensibles se joignent beaucoup d'autres, mais très petites, que les tables lunaires donnent le moyen d'apprécier; alors en les réunissant toutes à la longitude moyenne on obtient la longitude vraie. En Astronomie, les petites quantités qu'on ajoute aux valeurs moyennes, pour avoir les valeurs vraies, se nomment *équations*.

Pour plus de clarté, soit ΥN l'écliptique (fig. 8), P le pôle boréal de ce cercle, Υ le point équinoxial du printems, NL l'orbite de la Lune, L son lieu vrai, et T la Terre. On aura par les tables, la longitude ΥN du nœud Ω, la distance de ce nœud au périgée p, l'anomalie vraie pL, l'inclinaison LNL' de l'orbite, et par suite la longitude $\Upsilon L'$, la latitude LL' et le rayon vecteur TL.

33. Nous ne pouvons citer toutes les inégalités qui affectent les élémens de l'orbe lunaire, parce qu'il n'entre pas dans notre plan de traiter cette matière avec tous les détails dont elle est susceptible : nous ferons cependant remarquer encore, à cet égard, que le périgée de la Lune a un mouvement direct et irrégulier, et qu'il fait le tour du ciel en 9 ans; que le mouvement des nœuds, dont nous avons déjà parlé, est assujéti à une inégalité semblable à celle qui affecte le périgée; enfin que le mouvement du périgée et le mouvement des nœuds de l'orbite lunaire se rallentissent tandis que celui de la Lune s'accélère.

L'analyse seule a pu faire découvrir les lois de ces inégalités et de celles qui affectent la distance de la Lune à la Terre, sa latitude, l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite lunaire. (*Voyez*, pour de plus amples éclaircissemens, le *Traité d'Astronomie physique* par M. Biot, 2e édition.

CHAPITRE VII.

De la précession des équinoxes, de la nutation, de l'aberration et du déplacement de l'écliptique.

34. Suivant ce que nous avons déjà dit (art. 14), les points équinoxiaux se déplacent dans le ciel, et leur mouvement a lieu contre l'ordre des signes. Il résulte de là que les longitudes des étoiles augmentent progressivement de la même quantité dans le même intervalle de tems, par exemple, de 50″,1 par an environ, tandis que leurs latitudes restent constantes; il s'ensuit en outre que le Soleil arrive un peu plutôt aux équinoxes que si ces points étaient fixes. Or, les douze signes du zodiaque, qu'il ne faut pas confondre avec ses douze constellations, et qui ne sont, à proprement parler, que des points équidistans de l'écliptique, participent nécessairement du mouvement de points équinoxiaux, et s'avancent comme eux d'orient en occident d'une quantité angulaire de 50″,1 par an. C'est ce mouvement qu'on nomme *précession des équinoxes.* A l'époque inconnue de l'invention du zodiaque, l'équinoxe du printems se trouvait dans la constellation de Bélier, et celui d'automne dans la constellation de la Balance; mais maintenant, par l'effet du mouvement rétrograde de ces points, le Soleil se trouve au commencement du printems dans la constellation des Poissons. Selon les calculs les plus exacts des astronomes, les signes coïncidaient avec les constellations zodiacales en l'an 417 avant l'ère chrétienne.

En considérant l'obliquité de l'écliptique comme invariable et l'équateur céleste comme un plan mobile, la ligne des équinoxes fait évidemment décrire à celle des pôles de l'équateur la surface courbe d'un cône droit, puisque ces deux lignes doivent toujours être perpendiculaires entre elles. Les pôles dont il s'agit décrivent donc chacun en 25868 ans environ, des cercles parallèles à l'écliptique; c'est la période de la précession.

Dans l'hypothèse infiniment peu probable de l'immobilité absolue des points équinoxiaux, il faudrait admettre que toutes les étoiles

ont un mouvement commun et direct de 50″,1 par an, puisque telle est la quantité moyenne dont s'accroissent annuellement leurs longitudes. La précession des équinoxes n'affecte pas la latitude, comme nous venons de le dire; mais son effet se porte sur l'ascension droite et sur la déclinaison, ainsi qu'il est aisé de le voir. Nous aurons, par la suite, à évaluer les variations qu'éprouvent ces deux dernières coordonnées en vertu d'un changement survenu dans la longitude pendant un intervalle de tems donné : c'est en cela que consiste le calcul des positions moyennes des étoiles.

35. Nous venons de considérer l'écliptique comme fixe dans le ciel; mais dans la réalité elle se déplace peu à peu, et la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique, constatée par l'observation et la théorie de l'attraction universelle, est d'environ 50″. De là la nécessité de rapporter l'écliptique apparente ou mobile à un plan fixe, pour connaître dans tous les tems sa position dans l'espace. Ainsi prenant, par exemple, l'écliptique ΥE de 1750 (fig 9) pour ce plan fixe, et ΥQ pour l'équateur; au bout d'un certain laps de tems l'écliptique aura pris la position NE', et l'équateur celle $\Upsilon' Q'$, en sorte que l'intersection de ces deux grands cercles sera Υ''. Alors l'obliquité primitive ω, c'est-à-dire celle qui avait lieu à l'époque de 1750, ne sera plus que $\omega - d\omega$, en désignant par $d\omega$ la diminution de cet angle, pour l'intervalle de tems compris entre 1750 et l'époque choisie; mais l'angle $E\Upsilon' Q'$ sera, à la seconde époque, $\omega + d\omega'$. Dans le même intervalle l'arc $\Upsilon\Upsilon'$ mesurera la précession qu'on nomme *luni-solaire*, parce qu'elle est produite par l'action combinée de la Lune et du Soleil sur le sphéroïde terrestre; sa valeur annuelle est, suivant M. Laplace, de 50″,285 à fort peu près. Mais l'écliptique, par suite des perturbations des autres planètes, ayant pris la position NE', la précession que les astronomes observent réellement est mesurée par l'arc $\Upsilon_1\Upsilon''$, le point Υ_1 étant celui où se trouvait l'équinoxe Υ en 1750. Cette seconde précession, qui est annuellement de 50″,1 valeur moyenne, forme ce qu'on nomme la *précession générale* ou *totale*. Il résulte de là que le mouvement annuel et direct du point équinoxial en longitude est de 50″,285—50″,1=0″,185, tandis que le mouvement direct du même point en ascension droite est de 0″,20168. Nous donnerons, par la suite, des valeurs numériques encore plus exactes de ces différentes quantités.

36. La précession des équinoxes et l'obliquité de l'écliptique sont en outre sujettes à varier périodiquement : cette variation ou inégalité se désigne sous le nom de *nutation,* parce que l'on a remarqué que l'axe de la Terre ou du monde est doué d'une espèce de mouvement oscillatoire qui augmente et diminue alternativement de 9″,6, et dans l'espace de 18 ans environ, l'*obliquité moyenne* de l'écliptique. On entend par obliquité moyenne celle qui aurait lieu sans ce phénomène, et qui ne serait alors affectée que de la diminution séculaire de 50″. Il faut donc distinguer cette obliquité de l'obliquité apparente, comme il faut établir une différence entre la précession moyenne et la précession vraie qui se compose de la première corrigée de la nutation.

Cette nutation résulte de l'influence que la Lune exerce sur le sphéroïde terrestre ; et comme elle déplace l'équateur, il s'ensuit qu'en général les ascensions droites et les déclinaisons moyennes des astres éprouvent de petites variations périodiques ; il est donc nécessaire de les évaluer pour connaître les ascensions droites et déclinaisons vraies.

La période de la nutation étant précisément celle du mouvement des nœuds de la Lune (art. 31), il était naturel de penser, avant d'approfondir la théorie de ces deux phénomènes, qu'ils sont nécessairement liés l'un à l'autre.

37. On peut, par une construction géométrique, représenter le double effet de la précession et de la nutation lunaire sur la position des astres rapportée à l'équateur. Soit, par exemple, (fig. 10) ΥE l'écliptique, P' son pôle nord, C son centre, p le pôle *moyen* de l'équateur ΥQ; alors l'angle pCP' sera égal à l'obliquité moyenne ω. Soit en outre pR le cercle que le pôle moyen p décrit en vertu de la précession, et $a\pi b\pi'$ une petite ellipse tangente à la sphère céleste, dont le grand axe ab soutendant un arc de 19″,2 soit dans le plan du cercle de latitude $P'E$, dont le centre soit en p, et dont le petit axe $\pi'\pi'' = 19'',2'' \frac{\cos 2\omega}{\cos \omega}$, ainsi qu'il résulte de la théorie. Cela posé, tandis que le pôle moyen p décrit en 25868 ans le cercle de précession pR, le pôle vrai π de l'équateur, ou son correspondant, celui de la Terre, parcourt, contre l'ordre des signes et conformément à la loi que l'observation indique, l'ellipse de nutation $\pi\pi'b$.

L'obliquité vraie ou apparente de l'écliptique, qui sera à tout moment représentée par l'angle $\pi CP'$, variera par conséquent depuis $\omega + 9'',6$ jusqu'à $\omega - 9'',6$. Ainsi quand le pôle vrai occupera l'une des extrémités du petit axe $\pi'\pi''$, l'obliquité sera seulement ω, et la nutation en déclinaison sera nulle : au contraire, quand le pôle vrai arrivera à l'une des extrémités ab du grand axe, la nutation en déclinaison sera, abstraction faite du signe, de $9'',6$; tandis que la nutation en ascension droite sera nulle. Il résulte de là que l'équinoxe moyen est l'intersection de l'équateur moyen $\Upsilon Q \triangleq$ et de l'écliptique $\Upsilon E \triangleq$; et que l'équinoxe vrai est l'intersection de cette écliptique et de l'équateur dont π est le pôle.

Le Soleil produit lui-même un phénomène tout semblable, mais dont les effets sont beaucoup plus faibles; cependant pour avoir le lieu vrai d'un astre avec toute la précision possible, il est indispensable d'avoir égard à cette nutation solaire.

38. Un autre phénomène non moins remarquable est celui de l'*aberration;* il est tel, que toutes les étoiles paraissent décrire annuellement de petites ellipses plus ou moins excentriques, et ne pas conserver exactement leurs positions respectives.

On l'explique aisément, en l'attribuant à la sensation que le mouvement de la Terre autour du Soleil et celui de la lumière des astres produisent en même tems sur l'organe de la vue; car la transmission de ce fluide n'est point instantanée comme on l'a cru pendant long-tems. En effet, l'on a reconnu, par une longue suite d'observations des éclipses des satellites de Jupiter, que la lumière met $8'13'',2$ à parcourir le demi-grand axe de l'orbe terrestre.

Pour concevoir la raison de ce fait, soit S le Soleil (fig. 11), TT' l'orbite de la Terre, JJ' celle de Jupiter. Quand la Terre est en T et Jupiter en J, cette planète est en opposition et plus près de la Terre que si elle était en conjonction, c'est-à-dire que si se trouvant toujours en J, la Terre était en T'. Dans cet état de choses, lorsqu'un satellite L sort du cône d'ombre que Jupiter projette derrière lui par rapport au Soleil, la lumière qu'il réfléchit alors et qui arrive jusqu'à nous, a parcouru, à l'époque de la conjonction, tout le diamètre de l'orbe terrestre de plus qu'à l'époque de l'opposition. Or, d'après la connaissance exacte que l'on a des mouvemens célestes, on peut prédire l'instant physique du commencement ou de la fin d'une éclipse

de cette espèce. Mais ce phénomène paraît toujours arriver 16′ 26″,4 plus tard lors de la conjonction que vers l'opposition. La vitesse de la lumière est donc alors appréciable à nos sens; et puisqu'il est naturel de la supposer uniforme, il s'ensuit que la lumière parcourt réellement le demi-grand axe de l'orbe terrestre en 493″,2 de tems.

Cela posé, si la Terre et un astre lumineux étaient en repos dans l'espace, il est évident que nous verrions cet astre dans la direction même du rayon qui nous en apporte l'image; mais si au contraire la Terre parcourt l'écliptique dans une année sidérale, et par conséquent un arc moyen de 20″,25 dans 493″,2 de tems, sa vitesse sera comparable à celle de la lumière : alors en même tems qu'une molécule lumineuse lancée d'un astre supposé immobile, d'une étoile par exemple, frappera la rétine, elle sera repoussée dans le sens du mouvement de la Terre, c'est-à-dire suivant la tangente à son orbite; et l'œil éprouvera une sensation composée qui sera représentée par la résultante des deux vitesses dont il s'agit, et qui fera paraître l'astre dans la direction même de cette résultante. Il suit de là que nous ne voyons pas les astres dans le lieu qu'ils occupent réellement. L'angle que la résultante de la vitesse de la Terre et de la vitesse de la lumière fait avec celle-ci, mesure l'effet total de l'aberration. Le plan de cet angle décrit donc annuellement une circonférence entière autour de la droite qui joint la Terre et l'astre; c'est là le phénomène observé. Dans le cas actuel, la *position apparente* d'un astre n'est autre que sa position vraie affectée de l'aberration, comme la position vraie n'est autre que la position moyenne corrigée de la nutation. Toutefois il ne faut pas confondre la position apparente produite par la parallaxe (art. 23) avec la position apparente résultant de l'aberration, ni avec celle à laquelle la réfraction donne lieu.

39. Indépendamment de ces mouvemens généraux, l'on a reconnu dans quelques-unes des étoiles les plus brillantes des mouvemens particuliers très lents, mais que la suite des tems et de bonnes observations rendront plus sensibles. On est porté à croire, par analogie, que toutes les étoiles ont des mouvemens semblables qui se dévoileront dans les siècles futurs. Pour se rendre raison de la manière dont les astronomes s'assurent de l'existence de ces mouvemens propres, il suffit de savoir qu'après avoir observé la position

apparente d'une étoile, par exemple son ascension droite et sa déclinaison apparentes, ils dépouillent cette position de l'aberration et de la nutation dont elle se trouve affectée, afin de connaître l'ascension droite et la déclinaison moyennes de cette étoile pour la même époque. Or, une observation et une réduction semblables étant faites pour une autre époque éloignée de la première, de 50 ans par exemple, ils connaissent de même pour cette seconde époque l'ascension droite moyenne et la déclinaison moyenne de l'étoile. Alors si en déduisant une position moyenne de l'autre, à l'aide de la précession moyenne bien connue, les deux résultats ne sont pas identiques, leur différence, en la supposant assez sensible pour ne pas être uniquement attribuée aux erreurs d'observation, est le mouvement propre de l'étoile. Ce mouvement, tant en ascension droite qu'en déclinaison, et dont la loi est absolument inconnue, étant divisé par 50, exprime par approximation le mouvement propre annuel. Ordinairement on le confond avec celui qui est dû à la précession; ainsi dans les catalogues d'étoiles, comme dans celui que renferme la *Connaissance des Tems*, le mouvement annuel, soit en ascension droite, soit en déclinaison, se compose de la précession et du mouvement propre s'il y a lieu. On juge par là comment, en Astronomie, l'on rend les observations comparables entre elles, lorsqu'elles sont relatives à des époques différentes; c'est ce que l'on verra par la suite.

CHAPITRE VIII.

Exposition abrégée du système planétaire.

40. A mesure que les découvertes se multiplièrent en Astronomie, on sentit davantage la nécessité de renoncer à l'hypothèse de l'immobilité de la Terre, pour expliquer les diverses apparences des mouvemens des astres; aussi le système de Copernic a-t-il fini par triompher de toutes les futiles objections des partisans de cette immobilité. Ce système est appuyé sur un des faits les plus remarquables du mécanisme de la nature, savoir : que la Terre accompagnée de la Lune, ainsi que toutes les autres planètes, tournent d'occident en orient autour du Soleil, dans des orbes à peu près circulaires. Or, il est prouvé en Mécanique qu'un corps, en vertu de son inertie, ne peut se donner du mouvement, ni se priver de celui qu'il a reçu : il faut donc qu'une impulsion primitive ait lancé les planètes dans l'espace, et que de plus il existe une force qui agisse sur elles, pour les ramener sans cesse vers le centre du Soleil; sans quoi leur mouvement serait perpétuellement rectiligne. Mais l'impulsion donnée, quelle qu'ait pu en être la cause, n'ayant pas sans doute été dirigée par le centre de gravité de ces corps, il ont dû prendre en outre un mouvement de rotation, comme il arrive à un balon lancé dans l'air. En effet, l'on est parvenu à constater l'existence de ce dernier mouvement dans plusieurs des planètes et dans le Soleil même, par l'observation des taches adhérentes à leur surface.

L'astronome Képler, cherchant à connaître les lois des mouvemens planétaires, trouva qu'il en existe trois : ces lois, plutôt vérifiées que démontrées d'abord, sont essentiellement liées à un principe général de la nature, dont l'importante découverte est due à Newton, savoir : *que tous les corps se comportent entre eux comme s'ils s'attiraient mutuellement en raison directe de leurs masses, et réciproquement aux quarrés de leurs distances respectives :* tel est le fondement de toutes les théories astronomiques.

Quoique les lois de Képler se trouvent énoncées dans la plupart

des élémens de Mécanique, cependant nous les rappellerons ici en faveur de quelques lecteurs.

1°. *Le mouvement de la Terre, et celui de toutes les autres planètes, s'exécute dans des ellipses ayant un foyer commun occupé par le centre du Soleil.*

2°. *Les aires décrites autour du Soleil par le rayon vecteur des planètes, sont proportionnelles aux tems employés à les décrire.*

3°. *Les quarrés des tems des révolutions des planètes autour du Soleil, sont entre eux comme les cubes de leurs moyennes distances à cet astre.*

La situation d'une planète, ou son lieu dans l'espace pour un instant quelconque, dépend de sept quantités qu'on nomme *élémens du mouvement elliptique*. Deux de ces élémens déterminent la position de l'orbite de la planète; c'est d'une part la *longitude des nœuds* de cette orbite, ou de ses points d'intersection avec l'écliptique, et de l'autre l'*inclinaison de l'orbite* sur ce plan. Les cinq autres élémens se rapportent au mouvement de la planète, et sont, 1°. *la durée de la révolution sidérale;* 2°. *le demi-grand axe de l'orbite,* ou la moyenne distance de la planète au Soleil; 3°. *l'excentricité de l'orbite;* 4°. *la longitude du périhélie* à une époque donnée; 5°. *la longitude héliocentrique de la planète,* ou son lieu dans l'orbite à la même époque.

41. Si les planètes étaient assez éloignées les unes des autres, ou que leurs masses fussent assez petites pour que leur attraction réciproque fût nulle, leur mouvement elliptique autour du Soleil serait parfaitement d'accord avec les lois énoncées précédemment; mais l'écart entre l'observation et la théorie, que l'on remarque à l'égard de certaines planètes, prouve que l'action des astres qui les avoisinent trouble un peu leur mouvement. L'effet de cette action, que l'Astronomie moderne sait mesurer, se désigne sous le nom de *perturbations du mouvement elliptique,* comme nous l'avons déjà dit. Les périodes de ces perturbations sont plus ou moins longues.

C'est aussi par suite de la gravitation universelle que les orbes planétaires éprouvent divers changemens dévoilés par des observations suivies et faites avec le plus grand soin; tels sont ceux qui se manifestent dans leurs excentricités, leurs inclinaisons sur l'écliptique, ainsi que dans la position de leurs nœuds et de leurs périhélies,

leurs grands axes seuls exceptés. Ces variations se nomment *inégalités séculaires*, parce qu'elles ne deviennent bien sensibles qu'après un laps de tems assez considérable.

42. Les planètes connues de tous tems, parce qu'on les aperçoit à la vue simple, sont : *Mercure* ☿, *Vénus* ♀, *Mars* ♂, *Jupiter* ♃, *Saturne* ♄; mais l'on doit au télescope la découverte récente d'*Uranus* ♅, *Cérès* ⚳, *Pallas* ⚴, *Junon* ⚵, *Vesta* ⚶. C'est aussi à l'aide de ce précieux instrument qu'on a observé les satellites de quelques-unes de ces planètes. Jupiter en a quatre, Saturne sept, et de plus cette planète est entourée d'un anneau mince et presque plat, qui n'est lui-même visible que parce qu'il réfléchit la lumière du Soleil; c'est ce que prouve en effet l'ombre de cet anneau sur le disque de la planète, et celle de la planète sur la partie postérieure de l'anneau relativement au Soleil. Enfin Uranus possède six satellites. Tous les satellites tournent d'occident en orient autour de leurs planètes respectives.

Les lois de Képler, auxquelles est soumis le mouvement des planètes autour du Soleil, se manifestent dans chaque système de satellites; cependant elles sont loin, pour la Lune, de représenter les observations, parce que ce satellite éprouve des perturbations de la part du Soleil, ainsi que le démontre la théorie de l'attraction. Il est aussi des faits qui ne peuvent être constatés ou découverts que par l'analyse la plus savante. Par exemple, l'illustre auteur de la Mécanique céleste a démontré que *le moyen mouvement angulaire du premier satellite de Jupiter, plus deux fois celui du troisième, est et sera toujours égal à trois fois celui du second.*

C'est encore M. Laplace qui est parvenu à cet autre résultat très singulier, savoir : que *la longitude moyenne du premier satellite de cette même planète, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement égale à deux angles droits.* On tire de là, entre autres conséquences, que les trois premiers satellites de Jupiter ne pourront jamais être éclipsés à la fois.

Les satellites, reconnus pour être des corps opaques, sont éclipsés quand ils se trouvent dans le cône d'ombre que leur planète projette derrière elle, par rapport au Soleil.

La perfection donnée aux tables des deux premiers satellites de Jupiter, permet de faire servir utilement les observations de leurs

éclipses, à la détermination des longitudes terrestres; parce que les *immersions* et les *émersions* de ces corps célestes sont des phénomènes subits qui, à l'aide de bonnes lunettes et de bons yeux, se remarquent au même instant physique en différens lieux de la Terre.

43. Les orbites de Mercure et de Vénus sont renfermées dans celle de la Terre; ces deux planètes se nomment, pour cette raison, *planètes inférieures :* elles présentent des phases semblables à celles de la Lune. Mercure est difficile à voir, parce qu'il est très près du Soleil, et que souvent il est plongé dans ses rayons. Mais Vénus, surpassant par son éclat et sa blancheur toutes les autres planètes, s'observe beaucoup mieux, et ses phases, vues au télescope, sont bien plus distinctes. Cette planète s'éloigne du Soleil jusqu'à environ 48°; elle est connue vulgairement sous le nom d'*étoile du jour* ou d'*étoile du soir,* selon qu'elle précède le lever du soleil, ou qu'elle paraît après le coucher de cet astre : on la voit quelquefois en plein jour à la vue simple.

Les passages de Mercure et de Vénus sur le disque du Soleil, dont les durées sont sensiblement différentes en divers points de la Terre, à cause de la parallaxe, ont servi à déterminer celle du Soleil, et par suite la distance de cet astre à nous. On présume que ces trois planètes ont chacune une atmosphère.

Toutes les autres planètes sont dites *supérieures,* parce que leurs orbites embrassent celle de la Terre, et que par conséquent elles s'éloignent du Soleil à toutes les distances angulaires possibles. Mars est le plus près de nous; Jupiter vient ensuite. On aperçoit au télescope, sur les disques de ces deux planètes, et sur-tout sur Jupiter, diverses bandes obscures, parallèles et changeantes, ainsi que des taches qui deviennent plus ou moins apparentes. Ces changemens supposent une grande agitation à la surface de ces corps ou dans leur atmosphère, puisque, malgré l'énorme distance à laquelle ils s'effectuent par rapport à nous, ils sont encore sensibles.

Mars est d'une couleur rougeâtre; il présente aussi des phases, mais sous forme oblongue : celles de Jupiter sont insensibles à cause de son grand éloignement du Soleil et de la Terre. On a en outre observé dans Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne, un mouvement de rotation d'occident en orient, et à peu près dans le plan de leurs orbites.

Saturne, bien moins brillant que Jupiter, était, avant la découverte d'Uranus, aux confins du système planétaire. Il est sur-tout remarquable par son anneau, dont il est entièrement détaché; son disque paraît toujours rond; mais l'anneau situé dans le plan de l'équateur de la planète, et qui, à cause de son obliquité, paraît ordinairement elliptique, cesse d'être visible quand il se présente à nous de profil, ou du moins on ne l'aperçoit alors, à l'aide d'une forte lunette, que comme un filet lumineux: on croit même que cet anneau est composé de deux couronnes isolées.

La rotation de l'anneau et celle de la planète sont de même durée, et ont lieu d'occident en orient.

La planète Uranus, découverte en 1781, a pu être prise souvent pour une étoile, à cause de son peu d'éclat, de sa petitesse, et de la lenteur de son mouvement. Elle décrit en 84 ans un orbe qui comprend ceux de toutes les autres planètes. L'analogie porte à croire qu'elle est opaque, et qu'elle tourne aussi sur elle-même; mais jusqu'à présent on n'a pu en acquérir la preuve certaine.

Les autres planètes découvertes plus récemment encore, sont, comme nous l'avons déjà dit, *Cérès, Pallas, Junon* et *Vesta*. On ne les aperçoit, même très difficilement, qu'avec une très bonne lunette, et c'est pour cette raison qu'elles ne peuvent intéresser que les astronomes. Leurs orbites sont comprises entre celles de Mars et de Jupiter.

Quoique les planètes paraissent se mouvoir tantôt d'occident en orient, tantôt en sens contraire; que quelquefois même elles semblent stationnaires (art. 6), cependant elles ont toutes réellement un mouvement direct comme la Terre. Ce phénomène de la rétrogradation apparente tient à ce que les mouvemens angulaires de ces astres et de la Terre sont inégaux, comme on peut le voir par le Tableau suivant, qui donne, outre la durée des mouvemens de toutes les planètes, leurs distances au Soleil et leur grosseur relative.

NOMS DES PLANÈTES.	DURÉES de leurs révolutions sidérales.	DISTANCES moyennes AU SOLEIL.
☿ Mercure.....	87j,969	0,387
♀ Vénus.....	224,701	0,723
♁ La Terre....	365,256	1,000
♂ Mars.....	686,980	1,524
♃ Jupiter.....	4332,596	5,203
♄ Saturne.....	10758,970	9,539
♅ Uranus.....	30688,713	19,183
⚳ Cérès.....	1681,539	2,767
⚴ Pallas.....	1681,709	2,768
⚵ Junon.....	1590,998	2,667
⚶ Vesta.....	1335,205	2,373

Diamètres planétaires, celui de la Terre étant 1.		Volumes, celui de la Terre étant 1.	Durées des rotations des Planètes.
Le Soleil ☉.	109,93	1328460,0	25j,500
Mercure....	0,39	0,1	1,000
Vénus.....	0,97	0,9	0,973
La Terre...	1,00	1,0	0,997
Mars.....	0,56	0,2	1,027
Jupiter.....	11,56	1470,2	0,414
Saturne.....	9,61	887,3	0,428
Uranus.....	4,26	77,5	.....
La Lune ☾..	0,27	$\frac{1}{49}$	27,322

On se rappellera que les mouvemens autour du Soleil, et ceux de rotation, s'effectuent d'occident en orient; et que dans ce Tableau l'unité de tems est le jour moyen (art. 14).

Voici un autre Tableau des satellites connus:

SATELLITES DE JUPITER.		
Distances moyennes, le diamètre de la planète étant 1.		Durées des révolutions.
1er satellite.....	5,8130	1j,7691
2e.....	9,2487	3,5512
3e.....	14,7524	7,1546
4e.....	25,9469	16,6888
SATELLITES DE SATURNE.		
1er satellite.....	3,08	0j,943
2e.....	3,95	1,370
3e.....	4,89	1,888
4e.....	6,27	2,739
5e.....	8,75	4,517
6e.....	20,30	15,945
7e.....	59,15	79,330
SATELLITES D'URANUS.		
1er satellite.....	13,12	5j,893
2e.....	17,02	8,707
3e.....	19,85	10,961
4e.....	22,75	13,456
5e.....	45,51	38,075
6e.....	91,01	107,694

On voit par la troisième colonne de la première partie de ce Tableau, que la distance moyenne de la Terre au Soleil est prise pour unité; cette distance est égale au demi-grand axe de l'orbite de la Terre. On exprimera en rayons terrestres les distances renfermées dans cette colonne, en les multipliant par 23578, nombre qui exprime également en rayons terrestres, la distance de la Terre au Soleil; et si l'on multiplie en outre ces produits par la valeur du rayon de la Terre, qui est égal à 6375710 mètres, on aura ces mêmes distances en mètres.

Des Comètes.

44. Les comètes sont des astres dont l'apparition est de peu de durée : elles traversent dans toutes les directions possibles notre système planétaire, et se meuvent toutes, sinon dans des orbites elliptiques très allongées, du moins dans des sections coniques dont le Soleil est au foyer commun. Leur mouvement de translation, comme celui des planètes, est soumis aux lois de Képler.

La nébulosité qui enveloppe le noyau de la comète et le rend confus, paraît être son atmosphère. A mesure que cet astre s'approche du Soleil, la matière qui compose sa nébulosité se volatilise probablement de plus en plus par l'action de la chaleur solaire, et forme cette traînée de vapeur lumineuse et transparente, connue sous le nom de *queue,* laquelle est toujours opposée au Soleil. Mais ce n'est pas là le caractère distinctif des comètes, car il en est qui se sont montrées sans ce phénomène.

La comète très remarquable de 1680 est celle qui s'est approchée le plus du Soleil. A son périhélie elle en fut 166 fois plus proche que nous; il est donc naturel de penser que la chaleur qu'elle éprouva fut 27556 fois plus forte que celle qui est transmise à la Terre, dans l'hypothèse que son action s'exerce en raison inverse du carré des distances. S'il en est ainsi, les substances évaporables d'une comète diminuent à chacun de ses retours au périhélie.

Dans les tems d'ignorance et de superstition, les comètes, ainsi que les éclipses de Soleil et de Lune, étaient regardées comme les signes des plus grandes calamités. En 1773, la France même, saisie d'une vaine frayeur, crut à la fin prochaine du monde, parce que Lalande, dans un Mémoire qu'il venait de publier, indiquait celles des comètes observées qui peuvent le plus approcher de la Terre. Il pensait en outre que, par l'effet des perturbations planétaires, quelques-unes pourraient bien, à leur retour, la rencontrer et produire une terrible catastrophe. Cependant, la comète de 1770 qui, à cause de sa grande proximité de nous, devait être la plus redoutable, n'a plus reparu, quoique les astronomes lui eussent assigné une période de 5 ans et demi environ; ainsi, à moins que quelque cause ne l'ait fait disparaître pour nous, les perturbations qu'elle a dû éprouver ont changé considérablement les dimensions de son orbite; mais fût-elle revenue plus près de la

Terre, il y aurait eu des millions de probabilités contre tout évènement funeste.

La difficulté de prédire d'une manière certaine le retour d'une comète, tient à celle de déterminer rigoureusement les élémens de son orbe. La comète de 1456, découverte par Halley, est encore la seule qui ne laisse aucun doute à cet égard : elle reparaîtra en 1835; sa période est de 76 ans environ. Lorsqu'elle passa à son périhélie, son noyau, de la grandeur d'un œil de bœuf, avait l'éclat d'une étoile fixe, et sa queue, de couleur d'or, soutendait un angle de 60°. Ce beau spectacle se reproduisit en 1682. L'ellipse que cette comète décrit est fort excentrique, car son grand axe est 35 fois $\frac{9}{10}$ la moyenne distance du Soleil à la Terre. Quant à la distance périhélie, elle est seulement les $\frac{58}{100}$ de celle-ci.

Nous terminerons ici ces notions d'Astronomie, parce qu'elles sont plus que suffisantes pour faire comprendre les méthodes d'observation et de calcul que nous aurons occasion d'exposer. Mais ceux qui voudront acquérir des connaissances plus vastes sur cette matière, et approfondir les théories dont nous n'avons pu donner qu'une faible idée, devront particulièrement étudier l'*Exposition du Système du Monde*, ou le *Traité élémentaire d'Astronomie physique*.

LIVRE DEUXIÈME.

ANALYSE DES DEUX TRIGONOMÉTRIES.

CHAPITRE PREMIER.

De la Trigonométrie rectiligne.

45. Nous supposons dans cet ouvrage que le lecteur possède des connaissances assez étendues sur toutes les parties des Mathématiques élémentaires; néanmoins nous croyons utile de rappeler les principes généraux de la résolution des triangles rectilignes et sphériques, parce qu'ils servent de fondement aux théories et aux méthodes de calcul qui seront exposées par la suite. Nous donnerons même plusieurs formules trigonométriques nouvelles ou peu connues; mais avant d'entrer en matière nous allons présenter le tableau des principales fonctions circulaires qui s'emploient fréquemment dans les calculs trigonométriques, pour y effectuer diverses transformations que les circonstances exigent.

Soient p et q deux arcs quelconques d'un cercle dont le rayon est pris pour unité; on aura les formules connues

$$\sin(p \pm q) = \sin p \cos q \pm \cos p \sin q,$$
$$\cos(p \pm q) = \cos p \cos q \mp \sin p \sin q,$$

desquelles on tire aisément celle-ci :

$$\sin^2 p + \cos^2 q = 1;$$
$$2 \sin p \cos q = \sin(p+q) + \sin(p-q),$$
$$2 \cos p \sin q = \sin(p+q) - \sin(p-q),$$
$$2 \cos p \cos q = \cos(p+q) + \cos(p-q),$$
$$2 \sin p \sin q = \cos(p-q) - \cos(p+q),$$

$$2 \sin p \cos mp = \sin (m+1) p - \sin (m-1) p,$$
$$2 \cos p \sin mp = \sin (m+1) p + \sin (m-1) p,$$
$$2 \cos p \cos mp = \cos (m+1) p + \cos (m-1) p,$$
$$2 \sin p \sin mp = \cos (m-1) p - \cos (m+1) p,$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \tfrac{1}{2} (p+q) \cos \tfrac{1}{2} (p-q),$$
$$\sin p - \sin q = 2 \cos \tfrac{1}{2} (p+q) \sin \tfrac{1}{2} (p-q),$$
$$\cos p + \cos q = 2 \cos \tfrac{1}{2} (p+q) \cos \tfrac{1}{2} (p-q),$$
$$\cos p - \cos q = -2 \sin \tfrac{1}{2} (p+q) \sin \tfrac{1}{2} (p-q),$$

$$\sin 2p = 2 \sin p \cos p, \qquad \cos p = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} p,$$
$$\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p, \qquad \cos p = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} p - 1,$$
$$\sin^2 p - \sin^2 q = \cos^2 q - \cos^2 p = \sin (p+q) \sin (p-q),$$
$$\cos^2 p - \sin^2 q = \cos (p+q) \cos (p-q),$$
$$\cos p \cos q = \cos^2 \tfrac{1}{2} (p-q) - \sin^2 \tfrac{1}{2} (p+q),$$
$$\operatorname{tang} p = \frac{\sin p}{\cos p}, \qquad \cot p = \frac{1}{\operatorname{tang} p} = \frac{\cos p}{\sin p},$$
$$\operatorname{séc} p = \frac{1}{\cos p}, \qquad \operatorname{coséc} p = \frac{1}{\sin p},$$
$$\operatorname{tang} (p \pm q) = \frac{\sin (p \pm q)}{\cos (p \pm q)} = \frac{\operatorname{tang} p \pm \operatorname{tang} q}{1 \mp \operatorname{tang} p \operatorname{tang} q},$$
$$\operatorname{tang} p + \operatorname{tang} q = \frac{\sin (p+q)}{\cos p \cos q}, \qquad \cot p + \cot q = \frac{\sin (p+q)}{\sin p \sin q},$$
$$\operatorname{tang} p - \operatorname{tang} q = \frac{\sin (p-q)}{\cos p \cos q}, \qquad \cot p - \cot q = -\frac{\sin (p-q)}{\sin p \sin q},$$
$$\operatorname{tang}^2 p - \operatorname{tang}^2 q = \frac{\sin(p+q)\sin(p-q)}{\cos^2 p \cos^2 q}, \qquad \cot^2 p - \cot^2 q = -\frac{\sin(p+q)\sin(p-q)}{\sin^2 p \sin^2 q};$$
$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (p+q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (p-q)}, \qquad \frac{\cos p + \cos q}{\cos p - \cos q} = -\frac{\cot \frac{1}{2} (p-q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (p+q)}$$
$$= -\frac{\operatorname{séc} p + \operatorname{séc} q}{\operatorname{séc} p - \operatorname{séc} q},$$
$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (p+q), \qquad \frac{\sin p + \sin q}{\cos p - \cos q} = -\cot \tfrac{1}{2} (p-q),$$
$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (p-q), \qquad \frac{\sin p - \sin q}{\cos p - \cos q} = -\cot \tfrac{1}{2} (p+q),$$
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} p = \frac{\sin p}{1 + \cos p}, \qquad \cot \tfrac{1}{2} p = \frac{\sin p}{1 - \cos p},$$
$$\sin p = \frac{\operatorname{tang} p}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 p}}, \qquad \cos p = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 p}}.$$

Soit 1^q le quadrant; on a, suivant la division du cercle en 360 degrés sexagésimaux,

$$1^q = 90^\circ,$$

et suivant la division du cercle en 400 grades ou degrés décimaux,

$$1^{g} = 100^{s};$$

on a en outre

$$\sin 1^{g} = 1,\ \cos 1^{g} = 0;\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}^{g} = \operatorname{tang} 45^{\circ} = \operatorname{tang} 50^{s} = 1,$$
$$\operatorname{tang} 1^{g} = \operatorname{tang} 90^{\circ} = \operatorname{tang} 100^{s} = \infty = \text{l'infini};\ \cot 1^{g} = 0,$$
$$\text{séc } 1^{g} = \tfrac{1}{0} = \infty,\ \text{coséc } 1^{g} = 1 = \text{rayon}.$$

En général,

$$\begin{array}{ll} \sin(1^{g} \pm p) = +\cos p, & \cos(1^{g} \pm p) = \mp \sin p, \\ \sin(2^{g} \pm p) = \mp \sin p, & \cos(2^{g} \pm p) = -\cos p, \\ \sin(3^{g} \pm p) = -\cos p, & \cos(3^{g} \pm p) = \pm \sin p, \\ \sin(4^{g} \pm p) = \pm \sin p, & \cos(4^{g} \pm p) = +\cos p. \end{array}$$

46. Voici les énoncés des règles des signes qu'il importe d'observer dans l'emploi des valeurs trigonométriques.

1°. Le produit de deux quantités est positif ou négatif, selon que ces quantités sont affectées du même signe ou de signes différens. Même règle pour le signe du quotient de deux quantités.

2°. Le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente d'un angle moindre qu'un droit, sont positifs. Généralement, la sécante a le même signe que le cosinus, et la cosécante le même signe que le sinus; puisque

$$\text{séc } p = \frac{1}{\cos p},\ \text{et coséc } p = \frac{1}{\sin p}.$$

3°. Si un angle est compris entre 1 et 2 droits, son sinus et sa cosécante sont positifs; toutes ses autres lignes trigonométriques sont négatives.

4°. Tout angle compris entre 2 et 3 droits a son sinus et son cosinus négatifs, mais sa tangente et sa cotangente sont positives; en effet l'on a

$$\operatorname{tang} p = \frac{\sin p}{\cos p},\ \text{et } \cot p = \frac{\cos p}{\sin p}.$$

5°. Lorsqu'un angle est compris entre 3 et 4 droits, son cosinus et sa sécante sont positifs; ses autres lignes trigonométriques sont négatives.

6°. Enfin, le sinus d'un angle négatif, et compris entre 0 et 2 droits,

est lui-même négatif, et le cosinus est positif ou négatif selon que cet angle est aigu ou obtus. Quant aux signes des autres lignes trigonométriques, ils dépendent évidemment de ceux du sinus et du cosinus.

Remarquez que la plupart des formules précédentes ne sont pas homogènes, parce que le rayon des tables, représenté par l'unité, en est éliminé; mais, si l'on veut, il sera facile de rétablir l'homogénéité, en désignant ce rayon par R, et l'introduisant comme facteur, ainsi que ses puissances, dans tous les termes où le nombre de dimensions est moindre. Par exemple, la première du tableau s'écrirait ainsi :

$$R \sin(p \pm q) = \sin p \cos q \pm \cos p \sin q,$$

et la troisième deviendrait

$$\sin^2 p + \sin^2 q = R^2;$$

cela est évident.

Le rayon des tables pris pour unité, fait que les logarithmes de sinus et cosinus sont ceux de nombres fractionnaires. Dans cette hypothèse on a

$$\begin{aligned}
\log 0{,}1 &= 9{,}0000000 = \log \sin 5^\circ 44' 21'', 02,\\
\log 0{,}01 &= 8{,}0000000 = \log \sin 0.34.22\ ,69,\\
\log 0{,}001 &= 7{,}0000000 = \log \sin 0.\ 3.26\ ,26,\\
\log 0{,}0001 &= 6{,}0000000 = \log \sin 0.\ 0.20\ ,63,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

C'est ainsi qu'à l'avenir nous considérerons les logarithmes des fractions plus petites que l'unité, quoique quelques auteurs emploient à cet égard des caractéristiques négatives, ou des logarithmes entièrement négatifs; *voyez* l'explication qui précède les Tables de Logarithmes.

Résolution des triangles rectangles.

47. Avant de considérer en particulier les triangles rectangles, cherchons les relations qui existent entre les côtés et les angles d'un triangle rectiligne quelconque, et, pour cet effet, partons de ces deux propriétés connues, savoir :

Dans tout triangle rectangle, 1°. le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés.

2°. *Le cosinus d'un des angles aigus est égal au côté adjacent divisé par l'hypoténuse, en supposant le rayon des tables égal à l'unité.*

Soient désignés par a, b, c les trois côtés d'un triangle rectiligne quelconque (fig. 12); par A, B, C les angles qui leur sont respectivement opposés; par x le segment AD, formé par la perpendiculaire CD, et par y cette perpendiculaire; on aura évidemment,

$$y^2 = b^2 - x^2, \qquad y^2 = a^2 - (c-x)^2,$$

et par conséquent en égalant ces deux valeurs,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx,$$

ou

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

à cause de $x = b \cos A$. Il résulte de là que *le quarré d'un des côtés d'un triangle rectiligne quelconque est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés, diminuée du double produit de ces mêmes côtés multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils forment entre eux*, en supposant toutefois le rayon des tables égal à l'unité et l'angle A aigu.

Les trois équations cherchées sont donc

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{array}\right\} (A);$$

ainsi, lorsque parmi les six parties d'un triangle trois seront connues, savoir les trois côtés, ou deux côtés et un angle, ou bien deux angles et un côté, on pourra déterminer les trois autres parties.

Lorsque le triangle ABC est rectangle, ces équations se simplifient beaucoup; en effet, soit $A = 1^{\circ}$, on aura $\cos A = 0$, et partant

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 \\ c - a \cos B = 0 \\ b - a \cos C = 0 \end{array}\right\} (B).$$

On retombe donc sur les deux théorèmes desquels on est parti, ce qui doit être; mais alors $\cos B = \sin C$. Ainsi de ces deux dernières équations l'on tire

$$\sin C = \frac{c}{a}, \cos C = \frac{b}{a};$$

ensuite, en divisant l'une par l'autre,

$$\text{tang } C = \frac{c}{b};$$

donc, *dans un triangle rectangle,* 1°. *le sinus d'un des angles aigus est égal au côté opposé divisé par l'hypoténuse.*

2°. *La tangente d'un de ces mêmes angles aigus est égale au côté opposé divisé par le côté adjacent.*

D'ailleurs, à cause de $\sin C = \frac{c}{a}$ et $\sin B = \frac{b}{a}$, on a

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c} \text{ ou } \sin B : \sin C :: b : c;$$

ainsi, *dans tout triangle rectangle, les sinus des angles aigus sont proportionnels aux côtés opposés à ces angles.*

De la relation $c = a \cos B$, on tire

$$a - c = a\,(1 - \cos B);$$

mais $1 - \cos B = 2 \sin^2 \frac{1}{2} B$; donc

$$a - c = 2a \sin^2 \tfrac{1}{2} B;$$

on a aussi

$$a - c = a \frac{(1 - \cos B)}{\sin B} \sin B;$$

et à cause de $\frac{1 - \cos B}{\sin B} = \text{tang } \frac{1}{2} B$, il en résulte que

$$a - c = b \text{ tang } \tfrac{1}{2} B;$$

donc, l'*excès de l'hypoténuse sur un des côtés de l'angle droit est égal au double du produit de cette hypoténuse par le quarré du sinus de l'angle aigu adjacent à ce côté,* ou bien *est égal au produit d'un des côtés de l'angle droit par la tangente de la moitié de l'angle opposé.*

Résolution des triangles obliquangles.

48. Le théorème fondamental représenté par l'équation

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

sert à faire connaître directement le troisième côté d'un triangle

rectiligne, par le moyen de deux côtés et de l'angle compris; mais pour rendre facile l'opération par les logarithmes, on met, au lieu de $\cos A$ sa valeur $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} A$, et alors il vient

$$a^2 = (b-c)^2 + 2bc \sin^2 \tfrac{1}{2} A$$
$$= (b-c)^2 \left[1 + \frac{2bc \sin^2 \frac{1}{2} A}{(b-c)^2}\right].$$

La fraction $\frac{2bc \sin^2 \frac{1}{2} A}{(b-c)}$ pouvant en général être plus grande que le quarré de l'unité, supposons-la égale à $\tang^2 \theta$; dans ce cas l'on a

$$a = (b-c)\left[1 + \tang^2 \theta\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{(b-c)}{\cos \theta}.$$

Toutefois, la solution numérique ne sera rigoureusement exacte que lorsque la différence $b - c$ sera grande; si cette différence au contraire était très petite, il faudrait substituer dans l'équation fondamentale, pour $\cos A$ sa valeur $2\cos^2 \frac{1}{2} A - 1$, parce qu'il viendrait

$$a^2 = (b+c)^2 \left[1 - \frac{2bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2}\right];$$

mais dans cette circonstance l'on doit avoir $\frac{2bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} < 1$, sans quoi la racine de a serait imaginaire; nous pouvons donc supposer

$$\frac{2bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} = \sin^2 \theta;$$

ainsi $$a = (b+c) \cos \theta.$$

Ces solutions supposent que l'angle A est aigu; mais on voit bien comment il faudrait les modifier, si cet angle était obtus.

49. Pour trouver d'autres formules qui conviennent aux différens cas des triangles obliquangles, tirons d'abord de la première relation (A), cette valeur

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

et substituons-la dans l'équation $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$; il viendra, après les opérations convenables,

$$\sin^2 A = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2},$$

d'où l'on tirera, après avoir extrait la racine quarrée de part et d'autre, et multiplié le second membre haut et bas par a,

$$\sin A = a \times \frac{\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}{2abc};$$

mais si, pour abréger, l'on désigne par M toute la fraction qui multiplie a, on aura

$$\sin A = aM;$$

or, la quantité M étant une fonction symétrique des trois côtés du triangle, et par conséquent invariable, on en concluera pareillement

$$\sin B = bM, \ \sin C = cM;$$

donc $$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}, \text{ ou } \sin A : \sin B :: a : b;$$

donc enfin, *dans tout triangle rectiligne, les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés.*

De la proportion précédente, on tire sur-le-champ cette autre

$$\sin A + \sin B : \sin A - \sin B :: a + b : a - b,$$

d'où

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B};$$

mais, par le tableau des fonctions circulaires (art. 45), on a

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tang \frac{1}{2}(A+B)}{\tang \frac{1}{2}(A-B)};$$

ainsi

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tang \frac{1}{2}(A+B)}{\tang \frac{1}{2}(A-B)},$$

ou $$a + b : a - b :: \tang \tfrac{1}{2}(A+B) : \tang \tfrac{1}{2}(A-B):$$

et en langage ordinaire:

La somme de deux côtés quelconques d'un triangle rectiligne est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces mêmes côtés est à la tangente de leur demi-différence.

De là on tire, à cause de $\frac{A+B}{2} = 1^{\text{q}} - \frac{C}{2}$,

$$\tang\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b} \tang\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2} C.$$

Cette formule se rapporte au cas où l'on connaît deux côtés a, b et l'angle compris C; c'est-à-dire qu'elle donne le moyen de trouver la demi-différence des deux angles inconnus A, B : or, on a d'avance leur demi-somme, puisque $\frac{1}{2}(A+B) = 1^{\text{q}} - \frac{1}{2}C$; on a donc tout ce qu'il faut pour déterminer ces angles, et il est évident que

$$\text{le plus grand angle} = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2},$$
$$\text{le plus petit angle} = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}.$$

Si les deux côtés a, b sont connus par leurs logarithmes, ainsi qu'il arrive fréquemment dans la pratique, on pourra se dispenser de chercher les deux nombres correspondans pour calculer la formule précédente : voici alors comment il faudra opérer.

On considérera a, b comme les côtés d'un triangle rectangle, et en désignant par φ l'angle opposé au côté a, on aura

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{a}{b};$$

cet angle sera plus grand qu'un demi-quadrant, puisque l'on suppose $a > b$, et voilà pourquoi nous égalons à une tangente la quantité fractionnaire $\frac{a}{b}$; donc, à cause de $\text{tang}(\varphi - 50^g) = \frac{\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,50^g}{1 + \text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,50^g}$, et de $\text{tang}\,50^g = 1$, on aura

$$\text{tang}(\varphi - 50^g) = \frac{a-b}{a+b};$$

mais par ce qui précède,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{tang}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cot\frac{1}{2}C};$$

donc

$$\text{tang}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \cot\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}(\varphi - 50^g),$$

formule qui donnera de même la valeur de $\frac{A-B}{2}$.

50. Maintenant, si dans l'équation

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

qui fait connaître un angle au moyen des trois côtés, l'on met, au

lieu de $\cos A$ sa valeur $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} A$, on aura, en changeant les signes de tous les termes, et en laissant seulement $\sin^2 \frac{1}{2} A$ dans le premier membre,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}.$$

Le numérateur du second membre étant le produit des deux facteurs $(a + b - c)$, $(a - b + c)$, on donnera à cette équation la forme

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)}{bc};$$

mais $\frac{a+c-b}{2} = \frac{a+b+c}{2} - b$, et $\frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - c$;

si donc l'on désigne $a + b + c$ par $2p$, on aura, après avoir extrait la racine quarrée,

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

formule qui peut être calculée facilement par les logarithmes, et qui donne très promptement un angle d'un triangle dont on connaît les trois côtés. Si l'on y restitue l'homogénéité, et qu'on l'énonce en proportion, il en résultera que *dans tout triangle rectiligne, le produit de deux côtés quelconques est au produit des différences de ces mêmes côtés au demi-périmètre, comme le quarré du rayon des tables est au quarré du sinus de la moitié de l'angle que ces côtés comprennent.*

On peut exprimer d'une manière analogue le cosinus et la tangente de $\frac{1}{2} A$: en effet, puisque $1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2} A$, on aura, en mettant ici pour $\cos A$ sa valeur en fonction des trois côtés,

$$1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} A,$$

d'où
$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc};$$

puis procédant comme ci-dessus, il viendra

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}$$
$$= \sqrt{\frac{p \cdot (p-a)}{bc}};$$

et à cause de $\frac{\sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} A} = \text{tang} \frac{1}{2} A$, il s'ensuit que l'on aura

$$\text{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p\,(p-a)}}.$$

51. S'il était nécessaire de connaître les segmens formés par la perpendiculaire CD du triangle ABC (fig. 12), on y parviendrait de la manière suivante :

De la formule primitivement obtenue (art. 47), savoir,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx,$$

et qui peut s'écrire ainsi :

$$(a+b)(a-b) = c(c-2x),$$

on tire cette proportion facile à graver dans la mémoire,

$$c : a+b :: a-b : c-2x.$$

C'est-à-dire que quand la perpendiculaire CD tombe dans l'intérieur du triangle, *la base ou la somme des deux segmens est à la somme des deux autres côtés, comme la différence de ces mêmes côtés est à la différence des segmens.*

Soit donc d cette dernière différence; on aura

$$\text{le plus grand segment} = \frac{c+d}{2},$$

$$\text{le plus petit segment} = \frac{c-d}{2}.$$

52. On s'assure bien aisément, par l'analyse, que la seule connaissance des trois angles d'un triangle rectiligne ne suffit pas pour en déterminer les côtés; car si dans les trois équations (A) l'on considère a, b, c comme les inconnues du problème, et que l'on ajoute la première équation à la seconde, la première à la troisième, et la seconde à cette dernière; ensuite que l'on divise respectivement ces trois sommes par $2c$, $2b$, $2a$, l'on aura les équations suivantes du premier degré:

$$\left.\begin{array}{l} c - b\cos A - a\cos B = 0 \\ b - c\cos A - a\cos C = 0 \\ a - c\cos B - b\cos C = 0 \end{array}\right\} (C).$$

Mais parce que celles-ci ne renferment aucun terme tout connu, les

valeurs de a, b, c qu'elles fourniraient seraient nécessairement indéterminées; et l'on aurait pour le dénominateur commun de ces valeurs

$$1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C = 0 :$$

c'est en même tems la relation qui doit exister entre les trois angles d'un triangle rectiligne, pour que leur somme soit égale à deux droits. (*Application de l'Algèbre à la Géométrie*, par M. Lacroix, p. 141.)

Diverses expressions de l'aire d'un triangle rectiligne.

53. Soit S l'aire du triangle rectiligne ABC (fig. 12), et y sa hauteur; on aura

$$S = \frac{AB \times CD}{2} = \frac{cy}{2};$$

mais $y = b \sin A$; donc

$$S = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A \qquad (1).$$

D'ailleurs à cause de $\sin C : \sin B :: c : b$, on a $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$, et

$$S = \frac{c^2}{2} \frac{\sin A \sin B}{\sin (A+B)} \qquad (2).$$

Telles sont les deux formules qui donnent l'aire d'un triangle rectiligne, connaissant deux côtés et l'angle compris, ou bien un côté et les deux angles adjacens; mais il est utile en outre d'avoir la valeur de S en fonction des trois côtés. Or, si dans la formule (1) l'on met d'abord pour $\sin A$ sa valeur $2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$, on aura

$$S = bc \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A.$$

Ensuite, si pour $\sin \frac{1}{2} A$ et $\cos \frac{1}{2} A$ on substitue leurs valeurs trouvées à l'article 50, on obtiendra sur-le-champ

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Tous les théorèmes précédens peuvent sans doute se déduire de la simple Géométrie, et plusieurs même dérivent de constructions fort élégantes; aussi n'avons nous adopté dans cette circonstance la méthode analytique qu'à cause de sa fécondité, et que parce qu'elle fournit de la manière la plus simple toutes les formules trigonométriques connues.

CHAPITRE II.

De la Trigonométrie sphérique.

Théorème fondamental.

54. Les principes pour la résolution des triangles sphériques dérivent d'une seule équation que l'on déduit naturellement d'une propriété des triangles rectilignes, représentée par l'une des équations (A) (art. 47).

Soit (fig. 13) AD la tangente et OD la sécante de l'arc AB;

Soit de même AE la tangente et OE la sécante de l'arc AC.

Si l'on désigne, comme à l'ordinaire, par A, B, C les angles, et par a, b, c les côtés opposés du triangle sphérique ABC construit sur la surface d'une sphère du rayon 1, et dont le centre est en O, le triangle rectiligne ADE donnera, en faisant $DE = x$,

$$x^2 = \text{tang}^2\, b + \text{tang}^2\, c - 2\, \text{tang}\, b\, \text{tang}\, c \cos A;$$

le triangle ODE donnera de même

$$x^2 = \text{séc}^2\, b + \text{séc}^2\, c - 2\, \text{séc}\, b\, \text{séc}\, c \cos a;$$

soustrayant de cette équation la première, et faisant attention que $\text{séc}^2\, b - \text{tang}^2\, b = 1$, on aura, réduction faite,

$$1 + \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c} \cos A - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} = 0,$$

et par conséquent après avoir chassé le dénominateur,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Telle est l'équation fondamentale qu'il fallait trouver, et qui ferait connaître le troisième côté d'un triangle sphérique, si les deux autres côtés et l'angle qu'ils comprennent étaient donnés : elle est

facile à retenir. La démonstration que nous venons d'en donner est due à De Gua, qui l'a publiée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* (année 1783). Lagrange et d'autres géomètres célèbres l'ont depuis adoptée dans leurs Traités de Trigonométrie : on en verra une nouvelle dans le livre IV, au chapitre des parallaxes.

Une simple permutation de lettres fournit deux autres équations toutes pareilles; ainsi on a

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B\\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\end{aligned}\right\}\ (\alpha).$$

Il ne s'agit plus que de combiner convenablement ces trois équations, pour parvenir aux relations qui offrent le moyen de résoudre tous les cas possibles des triangles sphériques.

55. Si de la première équation l'on tire la valeur de $\cos A$, et qu'on l'introduise dans la relation $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, on aura

$$\sin^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c};$$

réduisant les termes du second membre au même dénominateur, multipliant haut et bas par $\sin^2 a$ et extrayant la racine, on obtiendra

$$\sin A = \sin a . \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c)}}{\sin a \sin b \sin c};$$

désignant par M toute la fraction qui multiplie $\sin a$, on pourra écrire plus simplement

$$\sin A = M \sin a;$$

et puisque M est une fonction symétrique ou invariable, quel que soit l'angle dont on cherche le sinus, il est évident que l'on aura pareillement

$$\sin B = M \sin b,$$
$$\sin C = M \sin c:$$

de là

$$\sin A : \sin B : \sin C :: \sin a : \sin b : \sin c,$$

ou bien

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b},\quad \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c},\quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c},$$

ainsi *les sinus des angles d'un triangle sphérique sont proportionnels au sinus des côtés qui leur sont opposés.* C'est en cela que consiste la proportion dite des quatre sinus.

Mais pour procéder du simple au composé, examinons d'abord les propriétés des triangles sphériques rectangles, quoique celles-ci ne soient que des cas particuliers des propriétés des triangles sphériques quelconques.

Formules pour la résolution des triangles sphériques rectangles.

56. Lorsque l'angle A est droit, le côté opposé a se nomme *l'hypoténuse,* et les relations (α) deviennent

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \cos b \cos c \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\end{array}\right\} (\alpha').$$

Il suit de la première relation que *dans tout triangle sphérique rectangle, le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des côtés qui comprennent l'angle droit.*

Eliminant $\cos a$ des deux dernières, on trouve

$$\cos b = \cos b \cos^2 c + \sin a \sin c \cos B = \cos b (1 - \sin^2 c) + \sin a \sin c \cos B,$$
$$\cos c = \cos c \cos^2 b + \sin a \sin b \cos C = \cos c (1 - \sin^2 b) + \sin a \sin b \cos C;$$

réduisant et divisant tout par $\sin c$, on a ces deux relations entre les trois côtés et un angle oblique :

$$\left.\begin{array}{l}\sin c \cos b = \sin a \cos B \\ \sin b \cos c = \sin a \cos C\end{array}\right\} (\alpha'');$$

mais à cause de $\sin a = \operatorname{tang} a \cos a$ et de $\cos a = \cos b \cos c$, ces nouvelles relations se changent en celles-ci :

$$\sin c \cos b = \operatorname{tang} a \cos b \cos c \cos B,$$
$$\sin b \cos c = \operatorname{tang} a \cos b \cos c \cos C,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B,$$
$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C;$$

c'est-à-dire, 1°. *que dans un triangle sphérique rectangle, la tangente de l'un des côtés de l'angle droit, divisée par la tangente*

de l'hypoténuse, est égale au cosinus de l'angle oblique adjacent à ce côté; 2°. que les tangentes des deux côtés de l'angle droit sont réciproquement proportionnelles aux cosinus des angles qui leur sont opposés.

57. Nous remarquerons en passant, que si, dans la pratique, il s'agissait de trouver l'angle B au moyen de l'hypoténuse a et du côté c adjacent, on aurait à résoudre l'équation

$$\cos B = \cot a \operatorname{tang} c;$$

mais dans le cas où l'angle B serait très petit, les tables ne pourraient le donner exactement par son cosinus. En le déterminant au contraire par la tangente de sa moitié, on aura toute l'exactitude requise. Or, à cause de $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B = \frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}$, on a, en substituant pour $\cos B$ sa valeur,

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{1 - \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}}{1 + \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}} = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} c} = \frac{\sin(a - c)}{\sin(a + c)},$$

et

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(a - c)}{\sin(a + c)}}.$$

Un angle d'un triangle sphérique étant toujours moindre que deux droits, $\frac{1}{2} B$ sera nécessairement aigu; ainsi l'on devra rejetter la racine négative, puisqu'elle donnerait $\frac{1}{2} B$ obtus.

58. Si on combine les deux équations (α'') par voie d'addition et de soustraction, l'on aura

$$\sin(b + c) = \sin a (\cos C + \cos B) = 2 \sin a \cos\left(\frac{B + C}{2}\right) \cos\left(\frac{B - C}{2}\right);$$

$$\sin(b - c) = \sin a (\cos C - \cos B) = 2 \sin a \sin\left(\frac{B + C}{2}\right) \sin\left(\frac{B - C}{2}\right);$$

et si on divise maintenant ces deux résultats l'un par l'autre, il viendra cette autre relation remarquable

$$\operatorname{tang}\left(\frac{B + C}{2}\right) \operatorname{tang}\left(\frac{B - C}{2}\right) = \frac{\sin(b - c)}{\sin(b + c)},$$

laquelle nous apprend que quand la somme des deux côtés de l'angle

droit est plus grande qu'une demi-circonférence, la demi-somme des deux angles opposés est nécessairement plus grande qu'un quadrant; car tang $\left(\frac{B-C}{2}\right)$ et sin $(b-c)$ ayant toujours le même signe, tang $\frac{B+C}{2}$ est positive ou négative selon que sin $(b+c)$ est positif ou négatif.

59. Pour trouver d'autres propriétés, élevons au quarré les premières relations (α') (α''); il viendra

$$\cos^2 b \cos^2 c = \cos^2 a,$$
$$\sin^2 c \cos^2 b = \sin^2 a \cos^2 B;$$

celles-ci étant ajoutées entre elles, on aura, en simplifiant,

$$\cos^2 b = \cos^2 a + \sin^2 a \cos^2 B = 1 - \sin^2 a \sin^2 B,$$

par conséquent

$$\sin^2 b = \sin^2 a \sin^2 B \quad \text{ou} \quad \sin b = \sin a \sin B;$$

c'est aussi ce qui résulte de la proportion des quatre sinus, démontrée à l'article 55; ainsi *dans un triangle sphérique rectangle, le sinus d'un côté de l'angle droit est égal au sinus de l'angle opposé multiplié par le sinus de l'hypoténuse.*

60. En Trigonométrie l'on entend par *cas douteux* celui où l'inconnue est donnée par son sinus; parce qu'alors le problème est en général susceptible de deux solutions. Si, par exemple, dans le triangle sphérique rectangle on connaissait b et B qui sont toujours de même espèce, et qu'on voulût déterminer l'hypoténuse a, on l'obtiendrait par la formule $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$; or, le sinus d'un arc moindre qu'un quadrant étant le même que celui d'un arc qui en est le supplément, on ne saura si a est aigu ou obtus. Il existe donc deux triangles rectangles qui satisfont aux données du problème.

61. Puisque l'on a, par ce dernier principe,

$$\sin b = \sin a \sin B,$$
$$\sin c = \sin a \sin C,$$

on obtiendra, en divisant ces deux équations respectivement par

celles (α'')

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} B &= \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c} \\ \operatorname{tang} C &= \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b} \end{aligned}\right\} (\alpha''');$$

ainsi *dans un triangle sphérique rectangle, la tangente d'un angle oblique est égale à la tangente du côté opposé, divisée par le sinus du côté de l'angle droit adjacent.*

On sait de plus, par ce qui précède, que

$$\cos B = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}, \qquad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a},$$
$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a}, \qquad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Divisant les équations supérieures par celles inférieures, et faisant les réductions, il vient, à cause de la première relation (α'),

$$\frac{\cos B}{\sin C} = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a} \cdot \frac{\sin a}{\sin c} = \cos b, \quad \frac{\cos C}{\sin B} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} \cdot \frac{\sin a}{\sin b} = \cos c;$$

donc, *dans un triangle sphérique rectangle, le cosinus d'un des côtés de l'angle droit est égal au cosinus de l'angle opposé, divisé par le sinus de l'angle oblique adjacent.*

Enfin, multipliant l'une par l'autre les équations (α'''), on a pour produit

$$\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = \frac{1}{\cos b \cos c} = \frac{1}{\cos a},$$

ou bien

$$\cos a = \cot B \cot C.$$

De cette relation l'on conclut que *le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cotangentes des deux angles obliques.*

62. Considérant toujours le triangle ABC rectangle en A, on a d'une part

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \text{ et de l'autre, } \cos B = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a};$$

puis changeant les tangentes en sinus et cosinus, il vient

$$\sin c \cos a = \cos B \cos c \sin a = \cos B \cos c \frac{\sin b}{\sin B}.$$

Maintenant si l'on substitue pour $\sin a$ et $\sin c \cos a$ leurs valeurs

dans la formule connue

$$\sin(a-c) = \sin a \cos c - \cos a \sin c,$$

on trouvera, à cause de $\frac{1-\cos B}{\sin B} = \tang \frac{B}{2}$,

$$\sin(a-c) = \sin b \cos c \tang \frac{B}{2},$$

résultat qui, en y mettant au lieu de $\cos c$ sa valeur $\frac{\cos a}{\cos b}$, deviendra

$$\sin(a-c) = \tang b \cos a \tang \frac{B}{2}.$$

Si on change les b en c et *vice versâ*, dans ces deux dernières formules, on aura sur-le-champ

$$\sin(a-b) = \sin c \cos b \tang \frac{C}{2},$$

$$\sin(a-b) = \tang c \cos a \tang \frac{C}{2};$$

ce qui fera connaître l'excès de l'hypoténuse sur un des côtés de l'angle droit. Ces formules ont été données pour la première fois par M. de Prony, mais sans démonstration. En voici deux autres qui s'obtiennent par le même procédé :

$$\cos(a-c) = \cos b + \sin b \sin c \tang \tfrac{1}{2} B,$$

$$\tang(a-c) = \frac{\tang b \cos c \tang \frac{1}{2} B}{1 + \tang b \sin c \tang \frac{1}{2} B};$$

mais leur forme rend l'emploi des logarithmes moins commode.

63. Voilà tout ce qui concerne la résolution des triangles sphériques rectangles. En ayant égard dans les formules, aux signes qui doivent affecter les valeurs de sin, cos, tang, etc., d'un angle, on ne sera nullement embarrassé sur l'espèce de l'angle ou du côté cherché, dans tous les cas qui ne sont pas douteux de leur nature. L'équation $\cos a = \cos b \cos c$, par exemple, nous apprend que chacun des trois côtés d'un triangle sphérique rectangle est plus petit qu'un quadrant, ou que si deux côtés sont plus grands que 100^g, le troisième sera nécessairement plus petit; ou enfin que si les deux côtés de l'angle droit sont d'espèce différente, l'hypoténuse sera plus grande qu'un quadrant.

De même, par l'équation $\tang B = \frac{\tang b}{\sin c}$, nous voyons qu'un

angle oblique est toujours de même espèce que le côté qui lui est opposé, puisque $\sin c$ est constamment positif.

Formules pour la résolution des triangles sphériques obliquangles.

64. La recherche des formules pour la résolution des triangles sphériques en général, ne donne lieu à aucune difficulté d'analyse.

D'abord, des équations fondamentales (α) l'on tire

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \end{aligned}\right\} \quad (\beta);$$

chacune de ces équations fait connaître un angle d'un triangle sphérique, lorsque les trois côtés sont connus; mais comme elles ne se présentent pas sous une forme commode pour les logarithmes, il est nécessaire de leur faire subir les transformations suivantes.

D'abord remarquons qu'à cause de $1 - \cos A = 2\sin^2 \frac{1}{2} A$ et de $1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2} A$, les relations ($\beta$) fournissent ces six autres :

$$1 - \cos A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} A,$$

$$1 - \cos B = \frac{\cos(a-c) - \cos b}{\sin a \sin c} = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} B,$$

$$1 - \cos C = \frac{\cos(a-b) - \cos c}{\sin a \sin b} = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} C,$$

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} A,$$

$$1 + \cos B = \frac{\cos b - \cos(a+c)}{\sin a \sin c} = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} B,$$

$$1 + \cos C = \frac{\cos c - \cos(a+b)}{\sin a \sin b} = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} C;$$

puis décomposons en facteurs les numérateurs des seconds membres en vertu de la formule rappelée précédemment, il viendra

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2\tfrac{1}{2}A &= \frac{\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\sin b\sin c},\\
\sin^2\tfrac{1}{2}B &= \frac{\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\sin a\sin c},\\
\sin^2\tfrac{1}{2}C &= \frac{\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\sin a\sin b},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}A &= \frac{\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\sin b\sin c},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}B &= \frac{\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\sin a\sin c},\\
\cos^2\tfrac{1}{2}C &= \frac{\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{\sin a\sin b}.
\end{aligned}\right\}\quad(\gamma)$$

Ces six valeurs peuvent se combiner de plusieurs manières différentes. En divisant l'une par l'autre celles qui se correspondent, on trouve

$$\left.\begin{aligned}
\tang^2\tfrac{1}{2}A &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)},\\
\tang^2\tfrac{1}{2}B &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)},\\
\tang^2\tfrac{1}{2}C &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}.
\end{aligned}\right\}\quad(\gamma')$$

Ainsi on pourra obtenir un angle d'un triangle sphérique en fonction des trois côtés, en calculant le sinus ou la tangente de la moitié de cet angle.

Maintenant, en multipliant deux à deux les relations (γ) on trouve aisément, après avoir extrait la racine quarrée,

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\sin\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c},\quad \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B=\sin\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin c},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}B\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b},\quad \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}B\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin b},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}A\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin a},\quad \cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}A\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin a},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B=\cos\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin c},\quad \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\cos\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin c},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C=\cos\tfrac{1}{2}B\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b},\quad \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C=\cos\tfrac{1}{2}B\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C=\cos\tfrac{1}{2}A\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a},\quad \cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C=\cos\tfrac{1}{2}A\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a};$$

Remarquez que quand on a obtenu la première relation de chaque système, il suffit d'une simple permutation de lettres pour avoir les deux autres relations.

Afin de parvenir aux conséquences les plus utiles, nous tirerons d'abord de ces dernières relations les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(A+B) &= \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B+\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\cos\tfrac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\sin\tfrac{1}{2}(A-B) &= \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B-\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\cos\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},\\
\cos\tfrac{1}{2}(A+B) &= \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B-\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\sin\tfrac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\cos\tfrac{1}{2}(A-B) &= \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B+\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\sin\tfrac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c},
\end{aligned}\right\}\quad(\delta)$$

lesquelles s'obtiennent facilement, en ayant égard aux formules de l'article 45. Ces valeurs remarquables sont dues à M. Delambre, qui les a démontrées d'une autre manière. On en tire sur-le-champ, en divisant la première par la troisième, et la seconde par la quatrième,

$$\tang\tfrac{1}{2}(A+B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)};$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(A-B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Puis divisant la quatrième par la troisième, et la seconde par la première, on a

$$\tang\tfrac{1}{2}(a+b)=\tang\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(a-b)=\tang\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Telles sont les quatre analogies de Néper. Les deux premières servent à trouver deux angles d'un triangle sphérique dans lequel on connaît les deux côtés opposés et l'angle compris ; en effet l'on a

$$\text{le plus grand angle } A=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2},$$

et

$$\text{le plus petit angle } B=\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}.$$

Les deux autres analogies s'emploient pour trouver deux côtés lorsqu'on a deux angles et le côté adjacent.

On arrive à ces formules, aux deux premières par exemple, par une méthode plus simple, ainsi qu'il suit.

Il est d'abord à remarquer que d'après l'art. 45,

$$\tang \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B};$$

$$\text{et} \quad \tang \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B};$$

ainsi il ne s'agit que de rendre les seconds membres de ces égalités fonctions de a, b et c. Or, si entre les première et troisième équations (α) l'on élimine $\cos c$, il viendra cette relation entre cinq parties d'un triangle,

$$\cos A \sin c + \cos C \sin a \cos b = \cos a \sin b;$$

par conséquent, changeant A en B et a en b, on aura

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b,$$
$$\cos B \sin c = \cos b \sin a - \cos C \sin b \cos a,$$

et ajoutant ces deux équations, il en résultera, réduction faite,

$$\sin c\,(\cos A + \cos B) = (1 - \cos C)\sin(a+b) \qquad (m).$$

D'un autre côté, par la règle des quatre sinus (art. 55), on a

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C,$$
$$\sin c \sin B = \sin b \sin C;$$

ajoutant et soustrayant ces deux équations, il vient

$$\sin c\,(\sin A + \sin B) = \sin C\,(\sin a + \sin b),$$
$$\sin c\,(\sin A - \sin B) = \sin C\,(\sin a - \sin b);$$

divisant successivement celles-ci par la précédente (m), on a

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{1 - \cos C}\left(\frac{\sin a + \sin b}{\sin(a+b)}\right),$$
$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{1 - \cos C}\left(\frac{\sin a - \sin b}{\sin(a-b)}\right),$$

enfin transformant ces valeurs à l'aide des relations de l'art. 45, on trouve comme ci-dessus,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

et de là cette propriété remarquable,

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)}.$$

65. Lorsqu'on n'a pour but que de déterminer un des angles inconnus, l'angle A par exemple, on l'obtient directement de la manière suivante :

Mettant dans la relation

$$\cos A\sin c=\cos a\sin b-\cos C\sin a\cos b,$$

trouvée précédemment, pour $\sin c$ sa valeur $\frac{\sin a\sin C}{\sin A}$, on a de suite

$$\cot A\sin C=\cot a\sin b-\cos C\cos b,$$

et par conséquent

$$\cot A=\frac{\cot a\sin b}{\sin C}-\cot C\cos b.$$

Cette formule donne donc immédiatement l'angle A, au moyen de deux côtés connus et de l'angle qu'ils comprennent. Changeant A en B, a en b, et réciproquement, on a de même

$$\cot B=\frac{\cot b\sin a}{\sin C}-\cot C\cos a.$$

66. Les relations (γ) nous ont procuré, par leurs combinaisons, plusieurs formules remarquables; on en déduit aisément encore d'autres : par exemple, en multipliant entre elles celles qui se trouvent sur la première ligne, puis prenant la racine quarrée et doublant le produit, on a, en faisant d'ailleurs $a+b+c=2s$,

$$2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A=\sin A=\frac{2[\sin(s)\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)]^{\frac{1}{2}}}{\sin b\sin c};$$

or, en rapprochant cette valeur de $\sin A$ de celle de l'art. 55, on voit évidemment que

$$\begin{aligned}&4\sin(s)\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\\&=1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c.\end{aligned}$$

67. On sait qu'un triangle sphérique est déterminé de grandeur, quand on connaît le rayon de la sphère à laquelle il appartient, ainsi que deux de ses côtés et l'angle qu'ils forment entre eux; car par l'une des formules (α) l'on peut obtenir le troisième côté. Un triangle de cette espèce est aussi déterminé de grandeur, si, outre le rayon de la sphère, on connaît deux angles et le côté qui les joint. Cherchons les formules relatives à ce cas, et pour cet effet reprenons la relation

$$\cos A \sin c = \cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b.$$

On voit qu'en y mettant pour $\sin a$ et $\sin c$ leurs valeurs respectives $\frac{\sin A \sin b}{\sin B}$, $\frac{\sin C \sin b}{\sin B}$, elle devient

$$\cos A \sin C = \cos a \sin B - \sin A \cos C \cos b;$$

changeant A en B et a en b, et *vice versâ*, on a pareillement

$$\cos B \sin C = \cos b \sin A - \sin B \cos C \cos a;$$

puis éliminant $\cos b$ entre ces deux équations, il vient pour la relation cherchée,

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C;$$

on a donc

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C \\ \cos B &= \cos b \sin A \sin C - \cos A \cos C \\ \cos C &= \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon).$$

Ce système d'équations est analogue à celui que nous avons désigné par (α), et il est remarquable que l'un se déduit de l'autre, en écrivant ABC au lieu de abc, et réciproquement; les cosinus étant toutefois affectés du signe négatif. La propriété du *triangle polaire* ou *supplémentaire* donne lieu à la même conséquence; car si A', B', C' sont les angles de ce triangle, et a', b', c' les côtés opposés, on a (*Géomét.* de M. Legendre, propos. IX, liv. VII) ces relations:

$$\begin{aligned} a' &= 200^g - A, & A' &= 200^g - a, \\ b' &= 200 - B, & B' &= 200 - b, \\ c' &= 200 - C, & C' &= 200 - c; \end{aligned}$$

mais nous savons que

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A';$$

par conséquent

$$\cos(200-A) = \cos(200-B)\cos(200-C) + \sin(200-B)\sin(200-C)\cos(200-a),$$

et enfin, comme ci-dessus,

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a.$$

68. On peut donc appliquer la règle que l'on vient d'énoncer, à toutes les formules démontrées jusqu'à présent, ou bien traiter analytiquement les formules (ε), comme nous avons traité leurs analogues (α) : de l'une ou de l'autre manière, l'on parviendra à de nouveaux systèmes d'équations qui compléteront la résolution de tous les cas de la Trigonométrie sphérique. Pour nous borner aux expressions les plus utiles, nous remarquerons d'abord que l'on a

$$1 - \cos a = -\frac{\cos(B+C)+\cos A}{\sin B \sin C} = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} a,$$

$$1 + \cos a = \frac{\cos A + \cos(B-C)}{\sin B \sin C} = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} a;$$

mais en général

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

ainsi

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B \sin C},$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)};$$

l'une de ces trois formules donnera un côté au moyen des trois angles; ainsi, par la première, on a

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C}}.$$

Si la quantité qui est sous le signe radical était négative, comme elle le paraît d'abord, il serait impossible de déterminer la valeur de $\sin \frac{1}{2} a$: cette valeur est cependant toujours réelle, car en général $\sin(x - 1^{\text{q}}) = -\cos x$; donc

$$\sin\left(\frac{A+B+C}{2} - 1^{\text{q}}\right) = -\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right),$$

quantité qui est toujours positive, parce que $A+B+C$ étant

nécessairement compris entre 2^{q} et 6^{q}, on a

$$\frac{A+B+C}{2} - 1^{\text{q}} > 0 \text{ et } < 2^{\text{q}}.$$

D'ailleurs le côté d'un triangle sphérique étant plus petit que la somme des deux autres, on a, par la propriété du triangle polaire, $2^{\text{q}} - A < 2^{\text{q}} - B + 2^{\text{q}} - C$, d'où $\frac{B+C-A}{2} < 1^{\text{q}}$; angle dont le cosinus est positif.

69. Nous pouvons maintenant tirer des conséquences semblables à celles des art. 55 et 66, savoir, que

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C}{\sin^2 B \sin^2 C},$$
$$= \frac{-4\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin^2 B \sin^2 C},$$

$2S$ désignant la somme des trois angles.

70. Si au lieu des formules

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)},$$

qui, comme nous l'avons déjà dit, servent à trouver à la fois deux côtés d'un triangle sphérique, au moyen du troisième côté et des deux angles qui lui sont adjacens, on voulait obtenir directement l'un des côtés a, b, le côté a, par exemple, il faudrait avoir recours à l'équation

$$\cot a = \frac{\cot A \sin B}{\sin c} + \cot c \cos B,$$

que l'on trouve sur-le-champ en changeant dans l'équation analogue $\cot A = \frac{\cot a \sin b}{\sin C} - \cot C \cos b$ (art. 65), les lettres majuscules en minuscules, *et vice versâ*, et affectant les cosinus et les cotangentes du signe négatif, comme nous l'avons déjà fait observer (art. 67).

On a pareillement, par une simple permutation,

$$\cot b = \frac{\cot B \sin A}{\sin c} + \cot c \cos A,$$
$$\cot b = \frac{\cot B \sin C}{\sin a} + \cot a \cos C;$$

ce qui donne une relation entre deux angles et deux côtés. Pour en avoir une entre les trois côtés et deux angles, différente de celle de l'art. 65, divisez l'une par l'autre les équations

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

il viendra de suite

$$\sin A \cot a = \sin C [\cos b \cot c + \sin b \cos A];$$

la relation semblable entre les trois angles et deux côtés sera visiblement

$$\sin a \cot A = \sin c \, [\sin B \cos a - \cos B \cot C].$$

71. Toutes les formules que nous venons de démontrer suffisent pour les besoins ordinaires de l'Astronomie, et sur-tout de la Géodésie; cependant nous allons en donner encore d'autres qui pourront trouver leurs applications, ou du moins qui concourront, avec les précédentes, à faire connaître la fécondité de l'Analyse trigonométrique.

Si de la formule

$$\sin (a - c) = \sin a \cos c - \cos a \sin c$$

on élimine $\sin a$ et $\sin c$, dont les valeurs respectives sont $\frac{\sin b \sin A}{\sin B}$ et $\frac{\sin b \sin C}{\sin B}$, on aura

$$\sin (a - c) = \frac{\sin b \cos c \sin A - \sin b \cos a \sin C}{\sin B};$$

mais à cause de la relation $\cos c \sin A = \cos C \sin B + \cos a \sin C \cos B$, donnée à l'art. 67, il est évident que l'expression précédente se changera en celle-ci :

$$\sin (a - c) = \sin b \cos C - \cos a \sin b \sin C \left(\frac{1 - \cos B}{\sin B}\right);$$

de là

$$\sin (a - c) = \sin b \cos C - \cos a \sin b \sin C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B,$$

formule donnée par M. Delambre et démontrée dans son Astronomie à l'aide d'une construction que nous avons voulu éviter ici,

afin de rendre notre procédé purement analytique. Cette formule est une généralisation de celle de l'art. 62.

Déterminons aussi $a - c$ par son cosinus et par sa tangente. D'abord la relation

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$

en y mettant pour $\cos B$ sa valeur $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} B$, devient

$$\cos b = \cos (a - c) - 2 \sin a \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} B;$$

puis, à cause de $\sin c = \frac{\sin b \sin C}{\sin B} = \frac{\sin b \sin C}{2 \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B}$, on a l'expression cherchée

$$\cos (a - c) = \cos b + \sin a \sin b \sin C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B,$$

par conséquent

$$\operatorname{tang} (a - c) = \frac{\operatorname{tang} b \cos C - \cos a \operatorname{tang} b \sin C \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}{1 + \sin a \operatorname{tang} b \sin C \operatorname{tang} \frac{1}{2} B};$$

formules nouvelles et qui rentrent évidemment dans celles de l'art. 62, lorsque le triangle sphérique est rectangle.

72. Les relations (δ) de l'art. 64 procurent de suite une expression très simple de $\sin (a - c)$; en effet l'on a, en y changeant B en C et b en c, *et vice versâ*,

$$\sin \tfrac{1}{2} (A + C) = \cos \tfrac{1}{2} B \frac{\cos \frac{1}{2} (a - c)}{\cos \frac{1}{2} b},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} (A - C) = \cos \tfrac{1}{2} B \frac{\sin \frac{1}{2} (a - c)}{\sin \frac{1}{2} b};$$

multipliant celles-ci l'une par l'autre et simplifiant, on a

$$\sin (a - c) = \frac{\sin b \sin \frac{1}{2} (A + C) \sin \frac{1}{2} (A - C)}{\cos^2 \frac{1}{2} B} = \sin b \frac{\cos C - \cos A}{2 \cos^2 \frac{1}{2} B}.$$

On trouverait aussi par une route toute semblable

$$\sin (a + c) = \frac{\sin b \cos \frac{1}{2} (A + C) \cos \frac{1}{2} (A - C)}{\sin^2 \frac{1}{2} B} = \sin b \frac{\cos C + \cos A}{2 \sin^2 \frac{1}{2} B},$$

expressions données par M. Delambre (*Astronomie*, t. I, p. 162), et qui, étant multipliées entre elles, procureraient une autre relation remarquable, mais que nous trouverons plus tard par une autre voie.

Si on rapproche les deux valeurs de $\sin(a-c)$, on aura visiblement

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+C)\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\cos^2\frac{1}{2}B}=\cos C-\cos a\sin C\operatorname{tang}\frac{1}{2}B,$$

ou bien

$$2\sin\tfrac{1}{2}(A+C)\sin\tfrac{1}{2}(A-C)=2\cos^2\tfrac{1}{2}B\cos C-\cos a\sin B\sin C,$$

relation nouvelle entre les trois angles et un côté d'un triangle sphérique; mais on peut y arriver par une route beaucoup plus directe. En effet, les deux équations

$$\cos A=\cos a\sin B\sin C-\cos B\cos C,$$
$$\cos C=\cos C,$$

étant soustraites l'une de l'autre, puis ajoutées ensemble, donnent, après quelques transformations faciles,

$$2\sin\tfrac{1}{2}(A+C)\sin\tfrac{1}{2}(A-C)=2\cos^2\tfrac{1}{2}B\cos C-\cos a\sin B\sin C,$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(A+C)\cos\tfrac{1}{2}(A-C)=2\sin^2\tfrac{1}{2}B\cos C+\cos a\sin B\sin C;$$

il suit de là que

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+C)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-C)=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}B\cos C-\cos a\sin B\sin C}{2\sin^2\frac{1}{2}B\cos C+\cos a\sin B\sin C}.$$

Nous ne nous arrêterons pas à faire voir que le triangle supplémentaire donnerait sur-le-champ des relations semblables entre les trois côtés et un angle.

73. On arrive très simplement à diverses relations entre les six parties d'un triangle, ainsi qu'il suit.

En vertu des art. 64 et 67 on a

$$\cos A\sin c=\cos a\sin b-\cos C\sin a\cos b,$$
$$\cos a\sin C=\cos A\sin B+\cos c\sin A\cos B;$$

divisant ces deux équations en croix il vient

$$\frac{\cos A\sin B+\cos c\sin A\cos B}{\cos A\sin c}=\frac{\cos a\sin C}{\cos a\sin b-\cos C\sin a\cos b},$$

et simplifiant, on a

$$\frac{\sin B+\cos c\operatorname{tang}A\cos B}{\sin c}=\frac{\sin C}{\sin b-\cos C\operatorname{tang}a\cos b};$$

divisant au contraire membre par membre les mêmes équations, et remarquant que $\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$, on trouve

$$\frac{\cot A}{\cot a} = \frac{\cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b}{\cos A \sin B + \cos c \sin A \cos B}.$$

Si dans la premiere équation l'on changeait A en B, a en b, et réciproquement, et qu'on procédât comme il vient d'être dit en premier lieu, on tomberait sur la relation

$$\frac{\cos A \operatorname{tang} B + \sin A \cos c}{\sin c} = \frac{\sin C}{\cos b \operatorname{tang} a - \sin b \cos C},$$

donnée par M. Delambre.

Enfin si on multiplie par $\cos B$, les deux membres de l'équation

$$\cos B \sin C = \cos b \sin A - \sin B \cos C \cos a,$$

obtenue à l'art. 67, on aura

$$\sin C - \sin^2 B \sin C = \cos b \sin A \cos B - \sin B \cos B \cos C \cos a;$$

ou bien

$$\frac{\sin C - \cos b \sin A \cos B}{\sin B} = \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a;$$

transportant cette relation dans le triangle polaire, on aura de même

$$\frac{\sin c - \cos B \sin a \cos b}{\sin b} = \sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A;$$

mais les premiers membres de ces deux dernières équations sont égaux, car

$$\frac{\sin C - \cos b \sin A \cos B}{\sin B} = \frac{\sin C}{\sin B}\left(1 - \cos b \cos B \frac{\sin A}{\sin C}\right),$$

et $$\frac{\sin c - \cos B \sin a \cos b}{\sin b} = \frac{\sin c}{\sin b}\left(1 - \cos b \cos B \frac{\sin a}{\sin c}\right).$$

D'ailleurs

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c}, \text{ et } \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin b};$$

on a donc cette autre relation symétrique entre les six parties d'un

triangle,

$$\sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a = \sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A;$$

celle-ci a été trouvée par Cagnoli par un procédé analytique tout différent (*voyez* sa *Trigonométrie*, p. 326, 2e édition). Cet astronome en a fait usage dans la recherche des formules d'aberration.

Formules usuelles pour la résolution des triangles sphériques en général, etc.

74. Le calcul des triangles sphériques ne comprend que six cas généraux.

1er CAS. *Étant donnés les trois côtés* a, b, c, *trouver un des angles.*

Par exemple, veut-on l'angle A, on l'obtiendra par la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}},$$

dans laquelle s exprime la demi-somme des trois côtés, ou par cette autre

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}},$$

qui évite une soustraction.

Si on voulait calculer directement l'angle A, il faudrait résoudre l'équation

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

mais alors pour n'employer que les logarithmes de lignes trigonométriques, on supposerait que $\cos b \cos c = \cos \alpha$, ce qui serait permis, puisque l'unité est la plus grande valeur que puisse acquérir un produit de cosinus : de cette manière on aurait

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos \alpha}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin\left(\frac{\alpha + a}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)}{\sin b \sin c}.$$

Le signe de $\cos A$ dépend nécessairement de celui de $\sin\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)$, et remarquez que l'arc subsidiaire α est $<$ ou $>$ 1° selon que les côtés b, c sont de même espèce ou d'espèces différentes (art. 63).

75. 2me Cas. *Étant donnés les trois angles* A, B, C, *trouver un des côtés.*

On aura le côté a, par exemple, à l'aide de la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)\cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C}};$$

on pourrait aussi obtenir $\frac{1}{2} a$ par son cosinus ou par sa tangente (art. 68).

76. 3me Cas. *Étant donnés deux côtés* a, b, *et l'angle compris* C, *trouver les autres parties du triangle.*

On aura le troisième côté c par la formule

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;$$

mais son emploi immédiat exige que l'on fasse usage de la table des sinus et de celle des nombres. On remédie à cet inconvénient en décomposant en deux facteurs le second membre de la formule; mais cette opération ne peut se faire qu'à l'aide d'un arc auxiliaire. Soit donc φ cet arc, et de plus M un coefficient indéterminé, en sorte qu'on ait

$$\cos c = M \cos (a - \varphi);$$

développant cette expression, il vient

$$\cos c = M \cos a \cos \varphi + M \sin a \sin \varphi,$$

d'ailleurs $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;$

et comme ces deux valeurs doivent être identiques, on a, en les égalant terme à terme

$$M \cos \varphi = \cos b,$$
$$M \sin \varphi = \sin b \cos C,$$

d'où $\tang \varphi = \tang b \cos C, M = \frac{\cos b}{\cos \varphi},$

et par suite,

$$\cos c = \frac{\cos b}{\cos \varphi} \cos (a - \varphi).$$

Autrement l'on a

$$\cos c = \cos b \,[\cos a + \tang b \cos C \sin a],$$

et si l'on fait $\tang b \cos C = \tang \varphi$, on aura, comme ci-dessus,

$$\cos c = \cos b\,[\cos a + \operatorname{tang}\varphi \sin a],$$
$$= \frac{\cos b}{\cos\varphi}\,[\cos a \cos\varphi + \sin\varphi \sin a],$$
$$= \frac{\cos b}{\cos\varphi} \cos(a - \varphi).$$

L'arc auxiliaire φ représente donc le côté de l'angle droit d'un triangle sphérique rectangle, dont b est l'hypoténuse et C l'angle oblique adjacent (art. 56); en d'autres termes, c'est le segment adjacent à l'angle C, formé par la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle A sur la base a opposée. Lorsque $\operatorname{tang}\varphi$ sera négative, auquel cas le segment sera extérieur au triangle, on prendra φ négativement, et par conséquent l'on aura $\cos c = \frac{\cos b}{\cos\varphi}\cos(a + \varphi)$; du reste il faudra avoir égard aux signes des cosinus.

77. Si, dans l'expression de $\cos c$, on met pour $\cos C$, sa valeur $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} C$, il viendra d'abord

$$\cos c = \cos(a - b) - 2\sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2} C;$$

puis si l'on change de même les autres cosinus, on trouvera, réduction faite,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c = \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b) + \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2} C$$
$$= \sin^2 \tfrac{1}{2}(a - b)\left[1 + \frac{\sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2} C}{\sin^2 \frac{1}{2}(a - b)}\right].$$

Soit $\quad \operatorname{tang}\theta = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} \sqrt{\sin a \sin b},$

on aura évidemment

$$\sin \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(a - b)(1 + \operatorname{tang}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \theta};$$

solution analogue à celle de l'art. 48 : elle est sur-tout utile lorsque le côté c ne peut être déterminé rigoureusement par son cosinus, à cause de l'exactitude limitée des Tables de logarithmes. En effet, quand c est très petit, son cosinus diffère si peu de l'unité, que le logarithme correspondant, qui ne renferme que 7 chiffres décimaux, appartient indifféremment à un arc plus grand ou plus petit. On ne tomberait pas dans cet inconvénient, si $\frac{1}{2} c$ était peu différent du quadrant, et qu'il fût donné par son cosinus.

Pour l'obtenir de cette manière, l'on remarquera qu'à cause de

$\cos c = 2\cos^2 \frac{1}{2} c - 1$, et de $\cos(a - b) = 2\cos^2 \frac{1}{2}(a - b) - 1$,

on a

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} c = \cos^2 \tfrac{1}{2}(a-b) - \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2} C,$$
$$= \cos^2 \tfrac{1}{2}(a-b)\left[1 - \frac{\sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2} C}{\cos^2 \frac{1}{2}(a-b)}\right];$$

or, ici l'on peut égaler au quarré d'un sinus la quantité qui suit l'unité dans le second membre, parce que le problème n'est possible qu'autant que le facteur binome est positif;

soit donc $\sin \theta = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} \sqrt{\sin a \sin b}$,

on aura $\cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \theta$:

la seconde racine négative est inadmissible, puisque $\frac{1}{2} c < 1^{\circ}$. Lorsque $a - b$ est très petit, il vaut mieux, pour l'exactitude de la solution numérique, changer $\cos C$ en $2\cos^2 \frac{1}{2} C - 1$, et l'on voit bien pourquoi, d'après une transformation analogue opérée à l'art. 48.

78. Quant aux angles inconnus A, B, ils se déduiront tous deux des analogies de Néper, qui donnent

$$\tang \tfrac{1}{2}(A+B) = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)},$$
$$\tang \tfrac{1}{2}(A-B) = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)};$$

car ensuite on a

$$A = \tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}(A-B), \text{ et } B = \tfrac{1}{2}(A+B) - \tfrac{1}{2}(A-B).$$

On aurait aussi directement

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos C \cos b}{\sin C},$$
$$\cot B = \frac{\cot b \sin a - \cos C \cos a}{\sin C};$$

et pour réduire, si l'on veut, à un seul terme chacun des seconds membres, le premier, par exemple; soit comme ci-dessus φ un angle auxiliaire, et M un coefficient indéterminé, puis supposons que

$$\cot A = M \sin (b - \varphi),$$

on aura, en développant,

$$\cot A = M \sin b \cos \varphi - M \cos b \sin \varphi;$$

ensuite, en comparant cette valeur à la précédente, il viendra

$$M\cos\varphi = \frac{\cot a}{\sin C},$$
$$M\sin\varphi = \cot C,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} a\cos C, \quad \text{et} \quad \cot A = \frac{\cot C}{\sin\varphi}\sin(b-\varphi);$$

ce qui revient à diviser le triangle proposé en deux triangles rectangles.

79. Les angles subsidiaires ont donc pour objet de transformer les expressions binomes en un seul terme, afin de les rendre plus faciles à évaluer par les logarithmes. On s'en convaincra de nouveau en résolvant le problème suivant :

Étant donnés, comme ci-dessus, a, b, C, *déterminer directement l'arc de grand cercle perpendiculaire au côté inconnu* c, *et compris entre ce côté et le sommet de l'angle* C *opposé.*

Soit γ cet arc ou la hauteur du triangle, on aura évidemment

$$\sin\gamma = \sin b\sin A = \frac{\sin a\sin b\sin C}{\sin c};$$

d'ailleurs, par ce qui précède,

$$\begin{aligned}\sin c &= \sqrt{1-\cos^2 c} = \sqrt{(1+\cos c)(1-\cos c)}\\ &= \sqrt{[1+\cos(a-b)-2\sin a\sin b\sin^2\tfrac{1}{2}C]}\\ &\qquad [1-\cos(a-b)+2\sin a\sin b\sin^2\tfrac{1}{2}C]\\ &= 2\sqrt{[\cos^2\tfrac{1}{2}(a-b)-\sin a\sin b\sin^2\tfrac{1}{2}C]}\\ &\qquad [\sin^2\tfrac{1}{2}(a-b)+\sin a\sin b\sin^2\tfrac{1}{2}C].\end{aligned}$$

Substituant donc cette valeur dans l'expression précédente, on trouvera, après quelques transformations aisées,

$$\begin{aligned}\sin\gamma &= \frac{\sin a\sin b\sin C}{\sqrt{(\cos a\sin b-\sin a\cos b\cos C)^2+\sin^2 a\sin^2 C}}\\ &= \frac{\cot\frac{1}{2}C}{\sqrt{\left[\frac{\cos^2\frac{1}{2}(a-b)}{\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C}-1\right]\left[\frac{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}{\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C}+1\right]}}.\end{aligned}$$

Soit maintenant

$$\frac{\cos^2\frac{1}{2}(a-b)}{\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C} = \text{séc}^2 u, \quad \text{et} \quad \frac{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}{\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C} = \operatorname{tang}^2 u';$$

alors l'expression précédente se changera en celle-ci

$$\sin\gamma = \cot u \cos u' \cot \tfrac{1}{2} C.$$

La solution qui se présente naturellement est de chercher d'abord le côté c par son cosinus et de résoudre ensuite l'équation $\sin\gamma = \frac{\sin a \sin b \sin C}{\sin c}$.

Voyons cependant si, en calculant directement la perpendiculaire γ par sa tangente, il n'y aurait pas quelque chose à gagner du côté de de la brièveté.

On a $$\tang^2\gamma = \frac{\sin^2\gamma}{1-\sin^2\gamma} = \frac{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C}{\sin^2 c - \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C};$$

substituant pour $\sin^2 c$ sa valeur $1-(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C)^2$, puis développant et réduisant, on trouvera

$$\tang^2\gamma = \frac{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C}{1-\cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b - 2\sin a \cos a \sin b \cos b \cos C}:$$

mettant dans le dénominateur, $\sin^2 a + \cos^2 a$ à la place de l'unité, et réduisant encore, on obtiendra facilement

$$\tang^2\gamma = \frac{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C}{\sin^2 a \cos^2 b + \cos^2 a \sin^2 b - 2\sin a \cos a \sin b \cos b \cos C}$$
$$= \frac{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C}{\sin^2(a-b) + 4\sin a \cos a \sin b \cos b \sin^2 \frac{1}{2} C};$$

enfin, faisant $\frac{\sin 2a \sin 2b \sin^2 \frac{1}{2} C}{\sin^2(a-b)} = \tang^2\theta$, on aura

$$\tang\gamma = \frac{\cos\theta \sin a \sin b \sin C}{\sin(a-b)},$$

solution plus courte que la première.

80. Il est facile de trouver d'autres expressions de l'arc perpendiculaire, lorsqu'on ne s'astreint pas à les rendre uniquement fonctions de deux côtés et de l'angle compris. Par exemple, si on élève au quarré l'équation $\sin\gamma = \sin b \sin A$, et qu'on fasse attention que $\sin b \sin A = \sin a \sin B$, on aura évidemment

$\sin^2\gamma = \sin a \sin b \sin A \sin B$, de là $\cos^2\gamma = 1 - \sin a \sin b \sin A \sin B$.

D'ailleurs à cause de $\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B$, on a

$$\sin A \sin B = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\cos c},$$

et par suite,

$$\cos^2\gamma = \frac{\cos c - \sin a \sin b \cos C - \sin a \sin b \cos A \cos B}{\cos c}$$
$$= \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b \cos A \cos B}{\cos c};$$

expression due à M. Delambre, et qui renferme trois côtés et deux angles. On peut aussi rendre $\sin\gamma$ fonction des trois côtés seulement, en mettant dans l'équation $\sin\gamma = \sin b \sin A$, pour $\sin A$ sa valeur donnée à l'art. 55.

Mais aucune de nos solutions n'indique si la perpendiculaire γ est plus petite ou plus grande qu'un quadrant. Pour lever le doute, il faudrait connaître les angles A et B; car s'ils sont de même espèce, la perpendiculaire tombera dans le triangle, et sera aussi de l'espèce de ces angles (art. 63).

81. Nous avons vu plus haut que la 3e équation (α) art. 54 prend cette forme

$$\sin^2\tfrac{1}{2}c = \sin^2\tfrac{1}{2}(a-b) + \sin a \sin b \sin^2\tfrac{1}{2}C,$$

son analogue (ε), art. 67, devient, par le même procédé,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}C = \cos^2\tfrac{1}{2}(A+B) + \sin A \sin B \sin^2\tfrac{1}{2}c;$$

or, si on élimine $\sin^2\frac{1}{2}C$ entre ces deux résultats, on obtiendra

$$\sin^2\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(a-b) + \sin a \sin b \cos^2\frac{1}{2}(A+B)}{1 - \sin a \sin b \sin A \sin B}.$$

Par une marche parfaitement semblable on trouverait

$$\cos^2\tfrac{1}{2}c = \cos^2\tfrac{1}{2}(a+b) + \sin a \sin b \cos^2\tfrac{1}{2}C,$$
$$\cos^2\tfrac{1}{2}C = \sin^2\tfrac{1}{2}(A-B) + \sin A \sin B \cos^2\tfrac{1}{2}c,$$

par suite

$$\cos^2\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos^2\frac{1}{2}(a+b) + \sin a \sin b \sin^2\frac{1}{2}(A-B)}{1 - \sin a \sin b \sin A \sin B},$$

et enfin

$$\tang^2\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(a-b) + \sin a \sin b \cos^2\frac{1}{2}(A+B)}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b) + \sin a \sin b \sin^2\frac{1}{2}(A-B)}.$$

C'est une des relations curieuses trouvées par M. Delambre

(*Astronomie*, tome I, page 201). Il en existe une toute pareille entre les trois angles et deux côtés, et cela est une suite naturelle de la propriété du triangle polaire. Mais en veut-on une différente composée de ces mêmes quantités, il n'y a qu'à multiplier l'une par l'autre les deux équations suivantes :

$$\cot A = \frac{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}{\sin a \sin C} = \frac{\sin(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C - \sin(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C}{\sin a \sin C},$$

$$\cot B = \frac{\cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C}{\sin b \sin C} = \frac{\sin(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C + \sin(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C}{\sin b \sin C},$$

obtenues à l'art. 65, et l'on aura

$$\cot A \cot B = \frac{\sin^2(a+b)\sin^4\frac{1}{2}C - \sin^2(a-b)\cos^4\frac{1}{2}C}{\sin a \sin b \sin^2 C},$$

ou autrement, à cause de $\sin^2 C = 4\sin^2\frac{1}{2}C\cos^2\frac{1}{2}C$, il viendra

$$4\sin a \sin b \cot A \cot B = \sin^2(a+b)\tang^2\tfrac{1}{2}C - \sin^2(a-b)\cot^2\tfrac{1}{2}C;$$

relation qui nous paraît nouvelle et assez remarquable.

Si, au contraire, on ajoute les valeurs de $\sin a \cot A$ et $\sin b \cot B$, on aura de suite

$$\sin b \cot B + \sin a \cot A = \sin(a+b)\tang\tfrac{1}{2}C,$$

pareillement $\sin b \cot B - \sin a \cot A = \sin(a-b)\cot\frac{1}{2}C$;

enfin multipliant, ensuite divisant ces deux résultats l'un par l'autre, il viendra

$$\sin^2 b \cot^2 B - \sin^2 a \cot^2 A = \sin(a+b)\sin(a-b);$$

$$\frac{\sin b \cot B + \sin a \cot A}{\sin b \cot B - \sin a \cot A} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}\tang^2\tfrac{1}{2}C.$$

Toutes ces relations fort simples pourraient servir, dans un calcul trigonométrique, à réduire en un seul terme des quantités complexes.

82. Avant de quitter cette digression sur les recherches de ce genre, nous ferons encore remarquer que les deux équations fondamentales

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c,$$

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b},$$

étant divisées l'une par l'autre, donnent tout d'abord cette autre relation connue,

$$\cot A \sin B = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin a \sin c}.$$

On pourrait, par de semblables artifices de calcul, trouver beaucoup d'autres relations trigonométriques, mais qui seraient plus curieuses qu'utiles.

83. 4e Cas. *Etant donnés deux angles* A, B *et le côté* c *compris, résoudre le triangle.*

La solution relative à ce cas est toute pareille à la précédente; ainsi on aura les deux côtés a, b par les formules de Néper, savoir :

$$\tang \tfrac{1}{2}(a+b) = \tang \tfrac{1}{2} c \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(a-b) = \tang \tfrac{1}{2} c \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)},$$

ou par celles-ci;

$$\cot a = \frac{\cot A \sin B + \cos B \cos c}{\sin c} = \frac{\cos c}{\cos \varphi} \cos (B-\varphi); \tang \varphi = \frac{\cot A}{\cos c};$$

$$\cot b = \frac{\cot B \sin A + \cos A \cos c}{\sin c} = \frac{\cos c}{\cos \varphi'} \cos (A-\varphi'); \tang \varphi' = \frac{\cot B}{\cos c}.$$

Ayant déterminé a et b, on trouvera sin C par l'équation..... $\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$, ou directement par la formule

$$\cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B;$$

ou bien soit $\tang \varphi = \frac{\cot B}{\cos c}$, on aura

$$\cos C = \frac{\cos B}{\sin \varphi} \sin (A-\varphi).$$

Pour trouver l'expression du sinus ou de la tangente de l'arc perpendiculaire au côté c en fonction des données actuelles, procédez comme dans le cas précédent, ou, ce qui est plus simple, transférez au triangle polaire les résultats ci-dessus (art. 79).

84. 5e Cas. *Etant donnés deux côtés* a, b *et l'angle* A *opposé au premier côté, trouver le troisième côté* c *et les deux autres angles* B, C.

L'angle inconnu B s'obtiendra par la formule $\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$; et

pour trouver l'angle C, on aura à résoudre l'équation

$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b,$$

qui monterait au second degré si l'on y mettait pour $\cos C$ sa valeur $\sqrt{1 - \sin^2 C}$, et qui fournirait par conséquent deux racines. Ainsi le problème proposé est susceptible de deux solutions. Mais au lieu de suivre cette voie, il est plus simple d'introduire dans le premier membre de l'équation un angle auxiliaire φ, tel qu'on ait

$$M \sin (C + \varphi) = \cot a \sin b.$$

Pour déterminer cet angle ainsi que le coefficient M, développons et comparons terme à terme les deux membres de ces équations, il viendra

$$M \cos \varphi = \cot A,$$
$$M \sin \varphi = \cos b.$$

De là

$$\tang \varphi = \tang A \cos b \quad \text{et} \quad \sin (C + \varphi) = \frac{\tang b \sin \varphi}{\tang a},$$

ici $1^{\text{q}} - \varphi$ est l'angle au sommet C du triangle formé par le côté b et la perpendiculaire abaissée sur la base c (art. 61).

Lorsqu'on substitue pour $\cos b$ sa valeur déduite de la seconde relation (ε), on a

$$\tang \varphi = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\cos A \sin C}.$$

on a en outre

$$\tang \varphi = \frac{\sin C}{\cot a \tang b - \cos C}.$$

Le troisième côté c sera donné par l'équation $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$; ou bien en n'employant que les données primitives, par la formule

$$\cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c = \cos a,$$

qu'on transformera en celle-ci

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b},$$

à l'aide d'un arc subsidiaire φ donné par l'équation $\tang \varphi = \cos A \tang b$. Cet arc, qui est le segment adjacent à l'angle A, et qui se trouve formé par la perpendiculaire abaissée de l'angle C sur le côté opposé,

peut s'exprimer analytiquement de plusieurs manières différentes, selon les données du problème; par exemple, si les trois côtés sont connus, on aura

$$\tang \varphi = \tang b \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b \sin c}.$$

Si deux côtés et l'angle compris sont donnés, on aura

$$\tang \varphi = \frac{\sin b \cos A}{\cos b} = \frac{\cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B}{\cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B};$$

c'est ce qu'il est aisé de voir. Il n'est pas plus difficile de reconnaître que

$$\tang \varphi = \frac{\sin c \cos A}{\cot B \sin A + \cos c \cos A} = \frac{\sin c}{\tang A \cot B + \cos c} = \frac{\cot A \sin B}{\text{coséc}\, a \cos b}.$$

Le même segment pourrait aussi s'exprimer en fonction des trois angles.

85. 6e Cas. *Étant donnés deux angles* A *et* B *avec le côté* a *opposé au premier, trouver les deux autres côtés* b, c *et le troisième angle* C.

La solution de ce problème se déduit de la précédente par la propriété d'un triangle polaire; ainsi on aura le côté b par l'équation $\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$, et le côté c par la formule

$$\cot a \sin c - \cos B \cos c = \cot A \sin B,$$

de laquelle on tirera

$$\sin (c - \varphi) = \frac{\tang B \sin \varphi}{\tang A},$$

en y introduisant un angle auxiliaire φ donné par l'équation

$$\tang \varphi = \cos B \tang a.$$

Enfin l'on trouvera l'angle C au moyen de l'équation

$$\cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C = \cos A;$$

mais pour abréger le calcul, on fera $\tang \varphi = \frac{\cot B}{\cos a}$, et l'on aura

$$\sin (C - \varphi) = \frac{\cos A \sin \varphi}{\cos B}.$$

Ce problème est, comme le précédent, susceptible de deux solutions (art. 60). Voyez la *Trigonométrie* de M. Legendre, pour savoir distinguer dans ces deux cas si parmi des valeurs particulières des quantités données, il existe deux triangles qui satisfont à la question, ou seulement un seul. Ici nous supposons les cas les plus généraux.

86. Si l'on connaissait deux angles A, B, ainsi que les deux côtés opposés a, b, et qu'on voulût déterminer immédiatement le troisième angle C, on pourrait transformer la relation

$$\sin(a-b)=\frac{\sin c \sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos^2\frac{1}{2}C},$$

démontrée à l'art. 72, en cette autre,

$$\sin(a-b)=\frac{2\sin a}{\sin A}\tang\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B),$$

qu'on obtient en multipliant le second membre de la première, haut et bas, par $\sin C$; et de là on aurait

$$\tang\frac{1}{2}C=\frac{\sin A\sin(a-b)}{2\sin a\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)},$$

sans ambiguité.

Il résulterait en outre de l'article cité,

$$\cot\frac{1}{2}C=\frac{\sin A\sin(a+b)}{2\sin a\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Si on voulait l'angle C par son cosinus, il faudrait de l'équation

$$\cos C=\cos c\sin A\sin B-\cos A\cos B$$

éliminer $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$, et l'on aurait, mais d'une manière beaucoup moins commode pour les logarithmes,

$$\cos C=\frac{\cos a\cos b\sin A\sin B-\cos A\cos B}{1-\sin a\sin b\sin A\sin B}.$$

Lorsqu'on multiplie entre elles les valeurs ci-dessus de $\tang\frac{1}{2}C$ et $\cot\frac{1}{2}C$, on a de suite la relation

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 A}=\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin(A+B)\sin(A-B)},$$

que l'on peut vérifier ainsi qu'il suit :

$$\text{En général, } \left.\begin{aligned} \sin^2 a - \sin^2 b &= \sin(a+b)\sin(a-b) \\ \sin^2 A - \sin^2 B &= \sin(A+B)\sin(A-B) \end{aligned}\right\} \text{art. 45;}$$

$$\text{ainsi,} \qquad \frac{\sin^2 a\left(1-\frac{\sin^2 b}{\sin^2 a}\right)}{\sin^2 A\left(1-\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}\right)} = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin(A+B)\sin(A-B)};$$

mais $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$; donc, etc.

Dans les applications numériques, il faudra, pour éviter les solutions inutiles ou fausses, avoir égard aux signes des lignes trigonométriques (art. 46), et se rappeler les trois règles suivantes :

1°. Tout angle ou tout côté d'un triangle sphérique doit être plus petit que deux quadrans;

2°. Les plus grands angles sont opposés aux plus grands côtés, et réciproquement;

3°. Enfin, un angle ou un côté d'un triangle sphérique ne peut être négatif.

De quelques propriétés remarquables du triangle sphérique, et notamment de diverses expressions de sa surface.

87. Il existe une propriété du triangle sphérique de laquelle on déduit immédiatement une relation entre les trois angles et deux côtés. Cette propriété est que *si on divise en deux parties égales, par des arcs de grand cercle, chacun des angles d'un triangle sphérique, ces arcs se couperont au même point.*

Supposons que les arcs Aa, Cc (fig. 15), divisent en deux parties égales les angles A, C, et se coupent au point R; il s'agit de prouver que l'arc de grand cercle BRb divisera aussi en deux parties égales l'angle B.

Or, les deux triangles CAR, RAc, donnent

$$\frac{\sin AC}{\sin R} = \frac{\sin CR}{\sin \frac{1}{2} A},$$
$$\frac{\sin Ac}{\sin R} = \frac{\sin cR}{\sin \frac{1}{2} A};$$

divisant ces deux équations l'une par l'autre, on a

$$\frac{\sin AC}{\sin Ac} = \frac{\sin CR}{\sin cR};$$

ainsi, quand un arc tel que AR divise également un angle d'un triangle sphérique, les sinus des segmens du côté opposé sont entre eux comme les sinus des côtés adjacens.

Le triangle ACB, dans lequel Cc partage en deux parties égales l'angle C, donne par conséquent

$$\frac{\sin AC}{\sin Ac} = \frac{\sin CB}{\sin cB}:$$

de ces deux rapports égaux il suit que

$$\frac{\sin CR}{\sin cR} = \frac{\sin CB}{\sin cB};$$

donc l'arc BR divise également l'angle B. Donc, etc.

Maintenant il résulte de l'art. 70 et de l'hypothèse ci-dessus, que les deux triangles BAR, CBR donnent respectivement

$$\cot BR = \frac{\cot \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B}{\sin c} + \cot c \cos \tfrac{1}{2} B,$$

$$\cot BR = \frac{\cot \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} B}{\sin a} + \cot a \cos \tfrac{1}{2} B;$$

on a donc la relation cherchée en égalant ces deux valeurs, et en réduisant, savoir :

$$\sin (a - c) = (\cot \tfrac{1}{2} C \sin c - \cot \tfrac{1}{2} A \sin a) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B;$$

c'est à quoi l'on parviendrait encore par quelques artifices de calcul appliqués à la valeur de $\sin (a - c)$, donnée à l'art. 72.

Si l'on fait attention qu'à cause de $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}$, l'on a

$$\sin a \cot A = \frac{\sin c \cos A}{\sin C}, \qquad \sin c \cot C = \frac{\sin a \cos C}{\sin A},$$

et par soustraction

$$\sin c \cot C - \sin a \cot A = \frac{\sin a}{\sin A} (\cos C - \cos A);$$

alors en mettant pour $\cos C$ et $\cos A$ leurs valeurs $2\cos^2 \frac{1}{2} C - 1$ et $2\cos^2 \frac{1}{2} A - 1$, il viendra

$$\sin c \cot C - \sin a \cot A = \frac{2\sin a}{\sin A}(\cos^2 \tfrac{1}{2} C - \cos^2 \tfrac{1}{2} A)$$
$$= \frac{\sin c . \cos^2 \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C} - \frac{\sin a . \cos^2 \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A}$$
$$= \sin c \cot \tfrac{1}{2} C - \sin a \cot \tfrac{1}{2} A.$$

Par conséquent l'on a aussi

$$\sin (a - c) = (\cot C \sin c - \cot A \sin a) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B.$$

88. Si du point R de concours des arcs qui divisent également chacun des angles A, B, C, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés opposés, ces perpendiculaires seront nécessairement égales comme dans le triangle rectiligne, et elles partageront aussi les trois côtés en six segmens égaux entre eux deux à deux. Par exemple, les segmens adjacens à l'angle A auront chacun pour valeur le demi-périmètre s du triangle, moins le côté opposé à cet angle. Ainsi, par la propriété du triangle sphérique rectangle, l'une des perpendiculaires dont il s'agit étant désignée par γ, on aura (art. 60),

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \gamma &= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A \sin (s - a) \\ &= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B \sin (s - b) \\ &= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C \sin (s - c); \end{aligned}$$

de là cette nouvelle relation, signalée par M Molweide, savoir :

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} B} = \frac{\sin (s - b)}{\sin (s - a)}.$$

(Voyez la *Connaissance des Tems*, pour l'année 1820, pag. 346.)

Il est évident que la distance α du point R à l'angle A sera donnée par la formule

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} (s - a)}{\cos \frac{1}{2} A}.$$

Quand on est parvenu à des formules nouvelles, il est utile de les vérifier par des exemples numériques : on pourra, pour cet effet, employer le triangle d'épreuve, dont M. Delambre a calculé toutes les parties (*Astron.*, tom. I, pag. 227).

Il est remarquable que si les arcs Aa, Bb, Cc étaient chacun perpendiculaires aux côtés a, b, c, ils se couperaient pareillement en un même point R. Cette autre propriété n'est pas plus difficile à démontrer que la précédente, et elle résulte de ce que les cosinus

des deux segmens de la base, formés par la perpendiculaire, sont proportionnels aux cosinus des côtés adjacens.

89. Occupons-nous maintenant de la recherche de l'aire d'un triangle sphérique, en fonction de trois des six parties dont il est composé. Or, on sait que l'aire d'un tel triangle a pour mesure l'excès de ses trois angles sur deux angles droits, c'est-à-dire qu'elle est égale à autant de triangles tri-rectangles, ou de huitièmes de la surface de la sphère, qu'il existe d'angles droits dans l'excès dont il s'agit (*Géomét.* de M. Legendre, liv. VII, prop. 23). Soit, d'après cela, Σ l'aire cherchée, 1^q le quadrant pris pour unité de mesure des angles, et A, B, C les trois angles d'un triangle sphérique; on aura

$$\Sigma = A + B + C - 2^q \qquad (1).$$

Mais ρ désignant le rayon de la sphère à laquelle le triangle appartient, et π la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est pris pour unité, on a pour l'expression de l'aire de cette sphère, $4\pi\rho^2$, et pour celle T du triangle proposé, évaluée en mesures quarrées,

$$T = \tfrac{1}{2}\pi\rho^2\Sigma \qquad (2);$$

formule dans laquelle le facteur Σ doit être un nombre abstrait. Par exemple, si Σ était donné en degrés, il faudrait remplacer ce facteur par $\frac{\Sigma}{90}$, parce qu'alors $1^q = 90°$.

On peut avoir Σ sous différentes formes. D'abord il est évident que

$$\sin\frac{\Sigma}{2} = \sin\left(\frac{A+B+C}{2} - 1^q\right) = -\cos\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2}\right);$$

développant le second membre, il vient

$$\sin\frac{\Sigma}{2} = -\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2} + \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2},$$

et substituant pour $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$ leurs valeurs en fonction de a, b, c, C (art. 64), on trouve

$$\sin\frac{\Sigma}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\left[\cos\tfrac{1}{2}(a-b) - \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\right]$$
$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}c} \qquad (3);$$

enfin remplaçant $\sin\frac{1}{2}C$ et $\cos\frac{1}{2}C$ par leurs valeurs (γ) données à l'art. 64, et faisant $2s = a + b + c$, pour abréger, on a

$$\sin\frac{\Sigma}{2} = \frac{\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \qquad (4).$$

Cherchons en outre l'expression de $\cos\frac{\Sigma}{2}$: on a d'abord

$$\cos\frac{\Sigma}{2} = \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - 1^{\text{q}}\right) = \sin\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2} + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}.$$

Substituant comme ci-dessus pour $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$ leurs valeurs, il vient

$$\cos\frac{\Sigma}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}$$
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) + [\cos\frac{1}{2}(a+b) - \cos\frac{1}{2}(a-b)]\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}$$
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b) - 2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}$$
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\,(1 - 2\sin^2\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}c};$$

ou bien, à cause de $\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}C$,

$$\cos\frac{\Sigma}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c} \qquad (5).$$

Cette formule, ou celle (3), fera connaître l'aire d'un triangle sphérique, au moyen de trois côtés et d'un angle. Pour en avoir une qui ne dépende que de deux côtés et de l'angle compris, on divisera l'une par l'autre (3) et (5); en effet, on aura sur-le-champ

$$\tang\frac{1}{2}\Sigma = \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C} = \frac{\tang\frac{1}{2}a\tang\frac{1}{2}b\sin C}{1 + \tang\frac{1}{2}a\tang\frac{1}{2}b\cos C} \quad (6);$$

expression encore toute rationnelle.

La valeur précédente de $\cos\frac{\Sigma}{2}$ peut se mettre sous une autre forme, ainsi qu'il suit.

De ce que

$$\cos\frac{1}{2}\Sigma = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c} - \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c},$$

il en résulte, lorsqu'on élimine $\sin^2 \frac{1}{2} C$, que l'on a

$$\cos \tfrac{1}{2} \Sigma = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} - \frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{2\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c};$$

mais $\sin (s-a) \sin (s-b) = \frac{1}{2}[\cos (b-a) - \cos c]$; ainsi

$$\cos \tfrac{1}{2} \Sigma = \frac{2\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2}(a-b) - \frac{1}{2} \cos (a-b) + \frac{1}{2} \cos c}{2\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c};$$

et comme $\cos (a-b) = 2\cos^2 \frac{1}{2}(a-b) - 1$, le numérateur du second membre de cette équation devient

$$[\cos \tfrac{1}{2}(a-b) + \cos \tfrac{1}{2}(a+b)] \cos \tfrac{1}{2}(a-b) - \cos^2 \tfrac{1}{2}(a-b) + \tfrac{1}{2} \cos c + \tfrac{1}{2},$$

et se réduit à

$$\cos \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(a-b) + \tfrac{1}{2} \cos c + \tfrac{1}{2} = \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{2};$$

on a donc cette formule remarquable, .

$$\begin{aligned} \cos \tfrac{1}{2} \Sigma &= \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{4\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a + \cos^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 \frac{1}{2} c - 1}{2\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \qquad (7). \end{aligned}$$

Cherchons maintenant, à l'exemple de M. Legendre (*Géométrie*, note X), l'expression du rapport $\frac{1 - \cos \frac{1}{2} \Sigma}{\sin \frac{1}{2} \Sigma}$. Premièrement, par ce qui précède,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \frac{1}{2} \Sigma}{\sin \frac{1}{2} \Sigma} &= \operatorname{tang} \tfrac{1}{4} \Sigma \\ &= \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{2} a - \cos^2 \frac{1}{2} b - \cos^2 \frac{1}{2} c + 2\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}; \end{aligned}$$

en second lieu, le numérateur de cette expression étant le développement de la quantité

$$(1 - \cos^2 \tfrac{1}{2} a)(1 - \cos^2 \tfrac{1}{2} b) - (\cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b - \cos \tfrac{1}{2} c)^2,$$

il s'ensuit qu'il peut être remplacé par le produit

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b + \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b - \cos \frac{1}{2} c) \\ (\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b - \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \cos \frac{1}{2} c) \end{array} \right\},$$

ou par cette autre,

$$[\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}c][\cos\tfrac{1}{2}c-\cos\tfrac{1}{2}(a+b)]$$
$$=4\sin\tfrac{1}{2}s\sin\left(\frac{s-a}{2}\right)\sin\left(\frac{s-b}{2}\right)\sin\left(\frac{s-c}{2}\right).$$

Mais en général,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\sqrt{\sin x}}=\sqrt{\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x};$$

ainsi, on a définitivement la formule suivante, due à M. Lhuilier de Genève :

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\Sigma=\sqrt{\left[\operatorname{tang}\frac{s}{2}\operatorname{tang}\left(\frac{s-a}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{s-b}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{s-c}{2}\right)\right]}\quad(8).$$

Toutes les relations précédentes sont connues; mais la route qui nous y a conduit nous paraît nouvelle et directe, et c'est ce qui nous a engagé à les reproduire ici.

90. Avant de terminer cette matière, appliquons d'abord la formule (6) à la recherche du *maximum* d'aire d'un triangle sphérique dont deux côtés sont constans. Dans ce but, égalons à zéro la différentielle du second membre de cette formule, afin de caractériser ce *maximum;* il viendra sur-le-champ

$$0=1+\cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b\cos C,$$

ou bien

$$0=\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b+\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos C.$$

Or, en mettant successivement pour $\cos C$ ses deux valeurs, $1-2\sin^2\frac{1}{2}C$ et $2\cos^2\frac{1}{2}C-1$, on a

$$2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\sin^2\tfrac{1}{2}C=\cos\tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos^2\tfrac{1}{2}C=\cos\tfrac{1}{2}(a+b).$$

Et, divisant ces deux relations l'une par l'autre, il vient

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Mais par une formule de Néper,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}C}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)};$$

ainsi définitivement

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B), \text{ et } C = A+B.$$

Il résulte de là que *de tous les triangles sphériques formés avec deux côtés donnés et un troisième à volonté, le plus grand est celui dans lequel l'angle compris par les deux côtés donnés, est égal à la somme des deux autres angles.*

On trouvera au livre VII de la *Géométrie* de M. Legendre, une autre démonstration de ce théorème.

La formule (4), qui donne l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés, procure une expression très simple du rayon du petit cercle inscrit. En effet, γ dénotant ce rayon, l'on a, par l'art. 88,

$$\text{tang}\,\gamma = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}A \sin(s-a);$$

partant,

$$\text{tang}^3\gamma = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}B\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c).$$

Substituant pour $\text{tang}\,\frac{1}{2}A$, $\text{tang}\,\frac{1}{2}B$, $\text{tang}\,\frac{1}{2}C$ leurs valeurs (art. 64), il vient, réduction faite, et après avoir extrait la racine cubique,

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin s\sqrt{\sin s}},$$

et enfin, à cause de la formule (4),

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{2\sin\frac{1}{2}\Sigma\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sin s};$$

expression qui rentre nécessairement dans celle relative au triangle rectiligne, lorsque les côtés du triangle sphérique sont infiniment petits.

Les auteurs de Traités de Trigonométrie sphérique à l'usage de l'Astronomie, donnent ordinairement une collection de formules différentielles trigonométriques, et même de formules aux différences finies : nous en démontrerons quelques-unes à mesure que le besoin s'en fera sentir ; mais on pourra consulter, pour plus de détails, le 1er volume de l'*Astronomie* de M. Delambre, ou la *Trigonométrie* de Cagnoli, 2e édition, traduite de l'italien par M. Chompré.

Voyons maintenant la résolution des triangles, par la voie des séries.

CHAPITRE III.

Résolution par les séries, de divers cas particuliers de la Trigonométrie.

91. La résolution des triangles par les formules que nous avons données dans les deux chapitres précédens, a tout le degré de généralité que l'on peut désirer; mais il arrive quelquefois dans la pratique, que l'erreur des Tables de logarithmes influe sensiblement sur les valeurs auxquelles conduisent les solutions générales : par exemple, lorsqu'un angle est donné par son sinus, il ne peut être déterminé rigoureusement à l'aide des tables ordinaires à sept décimales, lorsqu'il diffère très peu de l'angle droit. Pour obvier à cet inconvénient, nous analyserons quelques-uns des cas particuliers dont les solutions, quoiqu'approximatives, ont cependant l'avantage de procurer des résultats numériques plus exacts et plus indépendans de l'erreur dont il s'agit.

Nous emploierons les relations suivantes, qui sont assez connues pour que nous soyons dispensé d'en rappeler les démonstrations.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \ldots,$$

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\sin^7 x + \ldots,$$

$$x = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x - \tfrac{1}{7}\operatorname{tang}^7 x + \ldots,$$

$$\log(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots,$$

$\cos x = \cos x,$	$\sin x = \sin x,$
$2\cos^2 x = \cos 2x + 1,$	$2\sin^2 x = -\cos 2x + 1,$
$4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x,$	$4\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x,$
$8\cos^4 x = \cos 4x + 4\cos 2x + 3,$	$8\sin^4 x = \cos 4x - 4\cos 2x + 3.$
.....	.....

Nous aurons aussi occasion de convertir en parties du quadrant, ou en grades, un arc donné en parties du rayon pris pour unité. Cette opération est fondée sur la considération suivante :

Si l'on suppose que le rayon soit développé sur la circonférence, il comprendra un nombre de parties du quadrant, que l'on obtiendra à l'aide de la proportion

$$\pi : 1 :: 2^{Q} : R = \frac{2^{Q}}{\pi};$$

π désignant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$, Q le quadrant, et R un arc égal au rayon.

Dans la pratique, 1^{Q} dépend du système de division que l'on adopte; ainsi, dans l'hypothèse que $1^{Q} = 100$ grades ou degrés décimaux, le rayon sera exprimé en centigrades ou minutes centésimales, par

$$R' = \frac{20000}{\pi} = 6366',1977237,$$

dont le logarithme $= 3.80388012297$; à cause de $\pi = 3,141592$, et de $2^{Q} = 20000'$.

De même le rayon sera exprimé en décimilligrades ou secondes centésimales, par

$$R'' = \frac{2000000}{\pi} = 636619'',77237,$$

dont le logarithme est 5.8038801. Nous employons l'accent grave pour désigner les minutes et secondes de degré décimal, afin qu'on ne puisse pas les confondre avec les minutes et secondes de degré sexagésimal.

Ainsi, un arc quelconque, donné en parties du rayon considéré comme unité, sera exprimé en secondes, par exemple, en le multipliant par R''; et un arc donné en secondes sera converti en parties du rayon, en le divisant par R''.

Si on employait l'ancienne division du cercle, on aurait

$$R'' = 206264,8,$$
$$\text{et } \log R'' = 5.3144251.$$

Il est remarquable que $R'' = \frac{1}{\sin 1''}$, du moins à très peu près. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le sinus de $1''$, vu

sa petitesse, pouvant être pris pour l'arc même, on a sensiblement $\frac{1}{\sin 1''} = \frac{1}{\text{arc } 1''}$; mais $\frac{1}{\text{arc } 1''} = R''$ exactement; donc

$$R'' = \frac{1}{\sin 1''}.$$

Nous ferons, par la suite, usage de l'une et de l'autre expressions du rayon réduit en secondes.

Résolution d'un triangle rectiligne dont deux côtés sont donnés avec l'angle compris;

1°. *En supposant cet angle très obtus;*

2°. *En supposant qu'un des côtés donnés soit très petit à l'égard de l'autre.*

92. Soient a, b les côtés connus, et $C = 2^{\text{q}} - \theta$ l'angle compris, θ étant très petit.

La formule ($\mathcal{A}$) de l'art. 47 donnera, en conservant la notation qui y est indiquée, et en faisant attention que le cosinus de C est négatif,

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta;$$

mais l'angle θ est si petit par hypothèse, que les tables des sinus qui ne renferment les logarithmes qu'avec sept décimales, ne donneraient pas le log cos θ avec assez de précision; ainsi l'évaluation du terme $2ab \cos \theta$ ne serait pas assez exacte : à la vérité on pourrait, dans ce cas, recourir à la formule de l'art. 48 mais il vaut encore mieux procéder ainsi qu'il suit.

D'abord, d'après l'art. précédent,

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2};$$

ainsi

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = (a+b)^2 - ab\theta^2;$$

donc si l'on prend la racine quarrée en se bornant aux termes de l'ordre θ^2, on aura

$$c = (a+b) - \tfrac{1}{2}\frac{ab\theta^2}{(a+b)} \qquad (1).$$

Il est remarquable que, dans cette formule très simple, θ est

introduit comme un arc donné en parties du rayon; mais dans la pratique, cet arc est donné en minutes ou secondes; et comme il doit être employé dans la première hypothèse, il faudra diviser θ par R' ou R''; on aura donc en général

$$c=(a+b)-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{ab}{a+b}\left(\frac{\theta}{R}\right)^2.$$

Maintenant, de l'équation $\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c}$, ou $\frac{\sin A}{\sin\theta}=\frac{a}{c}$ on tire, en substituant la valeur de c et celle de $\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{2.3}$,

$$\sin A=\frac{a}{c}\sin\theta=a\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}\right)c^{-1}=a\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{ab\theta^2}{(a+b)^3}\right);$$

ou bien

$$\sin A=\frac{a\theta}{a+b}\left(1+\frac{ab-a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{\theta^2}{6}\right)\qquad(2).$$

Mais l'angle C étant très obtus, l'angle A sera fort aigu; ainsi le sinus de celui-ci pourrait être pris pour son arc, *et vice versâ*. Mais d'ailleurs on a $\sin A=A-\frac{A^3}{6}$; donc $A=\sin A+\frac{\sin^3 A}{6}$. Substituant pour $\sin A$ et $\sin A^3$ leurs valeurs déduites de l'équation (2), on aura plus exactement, en se bornant toujours aux termes de l'ordre θ^3,

$$A=\sin A+\frac{\sin^3 A}{6}=\frac{a\theta}{a+b}\left(1+\frac{b(a-b)}{(a+b)^2}\cdot\frac{\theta^2}{6}\right).$$

Il faut, dans cette formule, comme dans la valeur précédente de c, et pour la même raison, écrire $\frac{\theta}{R}$ au lieu de θ: mais la valeur actuelle de A serait donnée en parties du rayon; donc, pour l'avoir en minutes ou en secondes, il faudra la multiplier par R, ce qui revient à

$$A=\frac{a\theta}{a+b}\left[1+\frac{b(a-b)}{6(a+b)^2}\cdot\left(\frac{\theta}{R}\right)^2\right].$$

93. Supposons maintenant que b soit beaucoup plus petit que a, et qu'on veuille l'angle B en série; on développera d'abord la formule

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(B+C)}{\sin B},$$

qui deviendra

$$a \sin B = b (\sin B \cos C + \cos B \sin C),$$

et de laquelle on tirera

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b \sin C}{a - b \cos C}.$$

Mais en général

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

e étant la base des logarithmes népériens, ou le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$; par conséquent l'équation précédente deviendra

$$\frac{e^{B\sqrt{-1}} - e^{-B\sqrt{-1}}}{e^{B\sqrt{-1}} + e^{-B\sqrt{-1}}} = \frac{b(e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}})}{2a - b(e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}})} \quad (3).$$

Celle-ci peut être mise sous une forme plus simple et plus symétrique; car en divisant le premier membre haut et bas par $e^{-B\sqrt{-1}}$, on aura pour quotient

$$\frac{e^{2B\sqrt{-1}} - 1}{e^{2B\sqrt{-1}} + 1}, \text{ ou pour abréger, } \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1};$$

et le second membre pourra s'écrire ainsi :

$$\frac{a - be^{-C\sqrt{-1}} - (a - be^{C\sqrt{-1}})}{a - be^{-C\sqrt{-1}} + a - be^{C\sqrt{-1}}}, \text{ ou plus simplement } \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}.$$

L'équation (3) est donc de la forme

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}:$$

or, si dans cette dernière on chasse les dénominateurs, et que l'on réduise, on trouvera

$$\alpha = \frac{\beta}{\gamma};$$

et si on remplace α, β, γ par les valeurs que ces lettres représentent, on aura

$$e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{a - be^{-C\sqrt{-1}}}{a - be^{C\sqrt{-1}}} = \frac{N}{D} = \frac{1 - \frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}}{1 - \frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}};$$

ou prenant le logarithme népérien de chaque membre,

$$2B\sqrt{-1} = \log N - \log D.$$

Maintenant, développant le second membre d'après la formule connue, $\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} -$ etc., on aura

$$2B\sqrt{-1} = \frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}} + \frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}} + \frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}} + \ldots$$
$$-\frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}} - \ldots,$$

puis divisant tout par $2\sqrt{-1}$, et réduisant au moyen de la formule

$$\frac{e^{mC\sqrt{-1}} - e^{-mC\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin. mC,$$

on aura enfin pour la valeur de l'angle B, exprimée en parties du rayon,

$$B = \frac{b}{a}\sin C + \frac{b^2}{2a^2}\sin 2C + \frac{b^3}{3a^3}\sin 3C + \ldots\ldots.$$

Cette série élégante, à laquelle M. Delambre est parvenu le premier, est évidemment d'autant plus convergente, que b est plus petit à l'égard de a : elle donnera B en secondes en multipliant tous ses termes par R''.

Il suit de là que si on avait à résoudre l'équation $\tang x = \frac{\mu \sin C}{1 + \mu \cos C}$, et que μ fût une très petite fraction, comme ci-dessus, on aurait

$$x = \mu \sin C - \frac{\mu^2}{2}\sin 2C + \frac{\mu^3}{3}\sin 3C - \ldots..$$

Pour avoir le logarithme du côté c par une série qui procède suivant les cosinus des multiples de l'angle opposé, mettons au lieu de $\cos C$ sa valeur $\frac{e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}}}{2}$; on aura

$$c^2 = a^2 + b^2 - abe^{C\sqrt{-1}} - abe^{-C\sqrt{-1}},$$

et par conséquent

$$c^2 = (a - be^{C\sqrt{-1}})(a - be^{-C\sqrt{-1}})$$
$$= a^2\left(1 - \frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}\right).$$

Prenant le logarithme de chaque membre, et réduisant en série, il vient

$$2\log c = 2\log a - \frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}} \ldots$$
$$- \frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}} \ldots,$$

puis simplifiant à l'aide de la formule $\cos mC = \frac{e^{mC\sqrt{-1}} + e^{-mC\sqrt{-1}}}{2}$, réduisant et changeant les logarithmes népériens en logarithmes vulgaires, on a

$$\log c = \log a - M\frac{b}{a}\cos C - M\frac{b^2}{2a^2}\cos 2C - M\frac{b^3}{3a^3}\cos 3C - \ldots$$

M désignant le module 0,4342945. Cette série très remarquable est due à M. Legendre.

Étant connus l'hypoténuse d'un triangle sphérique rectangle, et un des angles obliques, trouver la valeur du côté adjacent à cet angle, exprimée en série.

94. L'équation qui donne le côté de l'angle droit c en fonction de l'hypoténuse a et de l'angle compris B est, d'après l'art. 56,

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B;$$

on a donc

$$\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a\,(1 - \cos B),$$
$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a\,(1 + \cos B);$$

or, si on divise les deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} c} = \frac{1 - \cos B}{1 + \cos B},$$

ou

$$\frac{\sin(a - c)}{\sin(a + c)} = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B;$$

et si on change les sinus en exponentielles imaginaires, on a

$$\frac{e^{(a-c)\sqrt{-1}} - e^{-(a-c)\sqrt{-1}}}{e^{(a+c)\sqrt{-1}} - e^{-(a+c)\sqrt{-1}}} = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B.$$

Multipliant et divisant par $e^{(a-c)\sqrt{-1}}$, on trouve

$$\frac{e^{2(a-c)\sqrt{-1}} - 1}{e^{2a\sqrt{-1}} - e^{-2c\sqrt{-1}}} = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B,$$

d'où

$$e^{2(a-c)\sqrt{-1}} = 1 + \tang^2 \tfrac{1}{2} B . e^{2a\sqrt{-1}} - \tang^2 \tfrac{1}{2} B . e^{-2c\sqrt{-1}}.$$

Mais

$$-\tang^2 \tfrac{1}{2} B . e^{-2c\sqrt{-1}} = -\tang^2 \tfrac{1}{2} B . \frac{e^{2(a-c)\sqrt{-1}}}{e^{2a\sqrt{-1}}};$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, on tire enfin

$$e^{2(a-c)\sqrt{-1}} = \frac{1 + \tang^2 \frac{1}{2} B . e^{2a\sqrt{-1}}}{1 + \tang^2 \frac{1}{2} B . e^{-2a\sqrt{-1}}}.$$

Maintenant si, comme dans l'article précédent, on prend de part et d'autre les logarithmes népériens, et que l'on développe en vertu de la formule $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$, il viendra

$$2(a-c)\sqrt{-1} = \tang^2 \tfrac{1}{2} Be^{2a\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2} \tang^4 \tfrac{1}{2} Be^{4a\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3} \tang^6 \tfrac{1}{2} Be^{6a\sqrt{-1}} - \ldots\ldots$$
$$- \tang^2 \tfrac{1}{2} Be^{-2a\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2} \tang^4 \tfrac{1}{2} Be^{-4a\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{3} \tang^6 . \tfrac{1}{2} Be^{-6a\sqrt{-1}} + \ldots\ldots,$$

et enfin

$$a - c = \tang^2 \tfrac{1}{2} B \sin 2a - \tfrac{1}{2} \tang^4 \tfrac{1}{2} B \sin 4a + \tfrac{1}{3} \tang^6 . \tfrac{1}{2} B \sin 6a - \ldots\ldots$$

Cette série, que Lagrange a publiée pour la première fois dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1776, se déduit aisément de celle de l'article précédent, comme on peut s'en assurer; elle n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale, que M. Legendre a donnée dans ses *Exercices de Calcul intégral*, lorsqu'il s'est proposé de développer en séries convergentes l'arc dont la tangente est donnée par une fonction rationnelle des sinus et cosinus d'un autre arc indéfini (*voyez* cinquième partie, pag. 238).

95. Soit généralement $\tang c = \theta \tang a$; on aura, d'après ce qui précède,

$$a - c = \frac{1-\theta}{1+\theta} \sin 2a - \tfrac{1}{2} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^2 \sin 4a + \ldots\ldots$$

Si l'on voulait avoir $a - c$ en fonction de c, on tirerait d'abord de l'équation hypothétique, $\tang a = \frac{1}{\theta} \tang c$, ou, pour abréger, . . . $\tang a = \theta' \tang c$; ainsi, en vertu de la série précédente, on aurait

$$c-a=\frac{1-\theta'}{1+\theta'}\sin 2c-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\theta'}{1+\theta'}\right)^2\sin 4c+\frac{1}{3}\left(\frac{1-\theta'}{1+\theta'}\right)^3\sin 6c,$$

ou

$$c-a=\frac{\theta-1}{\theta+1}\sin 2c-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-1}{\theta+1}\right)^2\sin 4c+\frac{1}{3}\left(\frac{\theta-1}{\theta+1}\right)^3\sin 6c;$$

ou bien, en changeant les signes,

$$a-c=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)\sin 2c+\frac{1}{2}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^2\sin 4c+\frac{1}{3}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^3\sin 6c.$$

Ces séries ne peuvent être utiles dans la pratique, qu'autant qu'elles convergent rapidement, ce qui exige que $\frac{1-\theta}{1+\theta}$ soit une fraction plus petite que l'unité.

Résolution d'un triangle sphérique dont deux côtés sont peu différens du quadrant.

96. Soient a et b les deux côtés donnés, supposés très peu différens du quart de la circonférence; on propose de trouver C en fonction des trois côtés a, b, c.

Par hypothèse

$$a=1^{\text{q}}-\alpha,$$
$$b=1^{\text{q}}-\beta;$$

et comme α et β sont très petits, l'angle C a pour mesure un arc très peu différent de c. Soit alors

$$C=c+x;$$

on aura

$$\sin\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}(c+x)=\sin\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}c,$$

puisque x est fort petit; et par suite,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}C=\sin^2\tfrac{1}{2}c+x\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c.$$

L'équation exacte

$$\sin^2\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a\sin b},$$

obtenue dans l'art. 64, résout la question proposee; mais vu qu'il serait pénible d'avoir C avec une grande exactitude, il vaut mieux

calculer le petit excès x de l'angle C sur c. Pour cet effet, l'on mettra dans l'équation précédente pour a, b et $\sin^2 \frac{1}{2} C$ leurs valeurs actuelles, et l'on aura

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c + x \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos^2 \frac{1}{2} c \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} :$$

puis prenant la valeur de $x \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$, il viendra

$$x \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c = \frac{[\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos \alpha \cos \beta] \sin^2 \frac{1}{2} c - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos^2 \frac{1}{2} c}{\cos \alpha \cos \beta} ;$$

mais

$$\cos \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) - \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),$$

puisqu'en général $\cos p = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} p = 2\cos^2 \frac{1}{2} p - 1$;
donc

$$x = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{tang} \frac{1}{2} c - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cot \frac{1}{2} c}{\cos \alpha \cos \beta} \qquad (1).$$

Telle est la formule à laquelle M. Delambre est parvenu, par une voie différente : en prenant les petits arcs pour les sinus, elle rentre dans celle que M. Legendre a donnée; c'est-à-dire que l'on a, d'après cette hypothèse,

$$x = \tfrac{1}{4}(\alpha + \beta)^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{4}(\alpha - \beta)^2 \cot \tfrac{1}{2} c \qquad (2).$$

2e *Solution*. On parvient plus simplement à cette formule ainsi qu'il suit. D'abord à cause de

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

on a

$$\cos C = \frac{\cos c - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\cos c - \alpha\beta}{1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)}$$
$$= \cos c - \alpha\beta + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \cos c = \cos c - x \sin c,$$

en ne conservant que les quantités du second ordre; et de là

$$x = \frac{\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \cos c}{\sin c}.$$

D'ailleurs à cause de

$$\cos c = \cos^2 \tfrac{1}{2} c - \sin^2 \tfrac{1}{2} c,$$

et de

$$\alpha\beta = \alpha\beta (\sin^2 \tfrac{1}{2} c + \cos^2 \tfrac{1}{2} c),$$

on a comme ci-dessus,

$$x = \frac{(\alpha+\beta)^2 \sin^2 \frac{1}{2} c - (\alpha-\beta)^2 \cos^2 \frac{1}{2} c}{2 \sin c = 4 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c}$$

$$= \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \cot \tfrac{1}{2} c.$$

Dans la pratique, $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ sont données en minutes ou secondes, tandis que ces quantités doivent être considérées dans cette formule comme des arcs comparés au rayon pris pour unité : mais si l'on y met $\frac{\alpha+\beta}{R}$ et $\frac{\alpha-\beta}{R}$ à la place de $\alpha+\beta$ et de $\alpha-\beta$, la correction x fera elle-même partie de ce rayon, et en la multipliant ensuite par R'' elle sera exprimée en secondes; on aura donc en général, mais d'une manière un peu moins exacte,

$$x = \tfrac{1}{4} \frac{(\alpha+\beta)^2}{R''} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{4} \frac{(\alpha-\beta)^2}{R''} \cot \tfrac{1}{2} c \qquad (2').$$

Il est évident que l'on obtiendra de même x en secondes, en multipliant par R'', ou par $\frac{1}{\sin 1''}$, le second membre de la formule (1).

Si l'on veut maintenant c en fonction de C, on remarquera que puisque ces deux quantités diffèrent très peu l'une de l'autre, on peut écrire C au lieu de c dans la valeur précédente de x, ce qui revient à négliger les quantités du troisième ordre; ainsi, d'une part, on a

$$c = C - x,$$

et de l'autre, si l'on fait $-x = y$, la correction cherchée sera

$$y = -\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)^2 \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} C}{R''} + \tfrac{1}{4}(\alpha-\beta)^2 \frac{\cot \frac{1}{2} C}{R''} \qquad (3).$$

On verra par la suite que la formule (2') sert pour réduire un angle à l'horizon, et que la formule (3) est employée pour réduire un angle horizontal au plan des cordes de deux arcs terrestres.

Résolution d'un triangle sphérique dont un côté est très petit à l'égard des deux autres.

97. Le calcul des latitudes, longitudes et azimuts des points fondamentaux d'une carte, dérive, ainsi qu'on le verra par la suite, de la résolution complète d'un triangle sphérique dont un côté est fort

petit par rapport aux deux autres. Occupons-nous donc de cette question.

1re *Solution*. Dénotons, comme à l'ordinaire, par A, B, C les angles, et par a, b, c les côtés d'un triangle sphérique quelconque; et cherchons les parties inconnues de ce triangle, dans lequel les deux côtés b, c et l'angle compris A sont supposés donnés.

Cherchons d'abord les angles B, C, et supposons $c < b$; on aura, par les formules de Néper (art. 64),

$$\tang \tfrac{1}{2}(B+C) = \cot \tfrac{1}{2}A \frac{\cos\left(\frac{b-c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(B-C) = \cot \tfrac{1}{2}A \frac{\sin\left(\frac{b-c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b+c}{2}\right)}.$$

Renversant ces valeurs, et développant, il viendra

$$\tang\left[100^g - \left(\frac{B+C}{2}\right)\right] = \frac{1 - \frac{\tang \frac{1}{2}c}{\cot \frac{1}{2}b}}{1 + \frac{\tang \frac{1}{2}c}{\cot \frac{1}{2}b}} \tang \tfrac{1}{2}A,$$

$$\tang\left[100^g - \left(\frac{B-C}{2}\right)\right] = \frac{1 + \frac{\tang \frac{1}{2}c}{\tang \frac{1}{2}b}}{1 - \frac{\tang \frac{1}{2}c}{\tang \frac{1}{2}b}} \tang \tfrac{1}{2}A.$$

Ces deux équations étant de la forme de celle de l'art. 95, on aura, en réduisant en séries par la méthode de cet article,

$$100^g - \left(\frac{B+C}{2}\right) = \tfrac{1}{2}A - \frac{\tang \frac{1}{2}c}{\cot \frac{1}{2}b} \sin A + \tfrac{1}{2}\frac{\tang^2 \frac{1}{2}c}{\cot^2 \frac{1}{2}b} \sin 2A$$
$$- \tfrac{1}{3}\frac{\tang^3 \frac{1}{2}c}{\cot^3 \frac{1}{2}b} \sin 3A + \ldots,$$

$$100^g - \left(\frac{B-C}{2}\right) = \tfrac{1}{2}A + \frac{\tang \frac{1}{2}c}{\tang \frac{1}{2}b} \sin A + \tfrac{1}{2}\frac{\tang^2 \frac{1}{2}c}{\tang^2 \frac{1}{2}b} \sin 2A$$
$$+ \tfrac{1}{3}\frac{\tang^3 \frac{1}{2}c}{\tang^3 \frac{1}{2}b} \sin 3A + \ldots,$$

d'où l'on tire par addition et soustraction,

$$200^g - B = A - [\tang \tfrac{1}{2}b - \cot \tfrac{1}{2}b] \tang \tfrac{1}{2}c \sin A$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\tang^2 \tfrac{1}{2}b + \cot^2 \tfrac{1}{2}b] \tang^2 \tfrac{1}{2}c \sin 2A$$
$$- \tfrac{1}{3}[\tang^3 \tfrac{1}{2}b - \cot^3 \tfrac{1}{2}b] \tang^3 \tfrac{1}{2}c \sin 3A + \ldots$$

et

$$C=[\tang\tfrac{1}{2}b+\cot\tfrac{1}{2}b]\tang\tfrac{1}{2}c\sin A-\tfrac{1}{2}[\tang^2\tfrac{1}{2}b-\cot^2\tfrac{1}{2}b]\tang^2\tfrac{1}{2}c\sin 2A$$
$$+\tfrac{1}{3}[\tang^3\tfrac{1}{2}b+\cot^3\tfrac{1}{2}b]\tang^3\tfrac{1}{2}c\sin 3A-\ldots$$

Ces deux séries régulières, dont la loi est évidente, sont dues à Lagrange : elles convergent d'autant plus rapidement, que c est plus petit par rapport aux deux autres côtés.

98. Dans la pratique de la Géodésie, il est plus simple d'employer les arcs que leurs moitiés. Pour se conformer à cet usage, on remarquera qu'à cause de

$$\tang\tfrac{1}{2}b=\frac{\sin b}{1+\cos b},\qquad \text{et}\qquad \cot\tfrac{1}{2}b=\frac{\sin b}{1-\cos b},$$

on a

$$\tang^2\tfrac{1}{2}b=\frac{1-\cos b}{1+\cos b},\qquad \cot^2\tfrac{1}{2}b=\frac{1+\cos b}{1-\cos b},$$
$$\tang^3\tfrac{1}{2}b=\frac{1-\cos b}{(1+\cos b)^2}.\sin b,\qquad \cot^3\tfrac{1}{2}b=\frac{1+\cos b}{(1-\cos b)^2}.\sin b,$$

et par suite,

$$\tang\tfrac{1}{2}b-\cot\tfrac{1}{2}b=-2\cot b,$$
$$\tang^2\tfrac{1}{2}b+\cot^2\tfrac{1}{2}b=2[1+2\cot^2 b],$$
$$\tang^3\tfrac{1}{2}b-\cot^3\tfrac{1}{2}b=-2\cot b[3+4\cot^2 b],$$
$$\tang\tfrac{1}{2}b+\cot\tfrac{1}{2}b=\frac{2}{\sin b},$$
$$\tang^2\tfrac{1}{2}b-\cot^2\tfrac{1}{2}b=-\frac{4\cot b}{\sin b},$$
$$\tang^3\tfrac{1}{2}b+\cot^3\tfrac{1}{2}b=\frac{2}{\sin b}[1+4\cot^2 b].$$

Substituant ces valeurs dans les deux séries précédentes, elles se changeront en celles-ci :

$$200-B=A+2\tang\tfrac{1}{2}c\sin A\cot b+\tfrac{2}{3}\tang^2\tfrac{1}{2}c\sin 2A.[1+2\cot^2 b]$$
$$+\tfrac{2}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}c\sin 3A.\cot b[3+4\cot^2 b],$$
$$C=2\,\frac{\tang\frac{1}{2}c}{\sin b}\sin A+2\,\frac{\tang^2\frac{1}{2}c}{\sin b}\sin 2A.\cot b$$
$$+\tfrac{2}{3}\,\frac{\tang^3\frac{1}{2}c}{\sin b}.\sin 3A.[1+4\cot^2 b].$$

On peut d'ailleurs ordonner ces séries par rapport aux puissances de l'arc c; car on a

$$\tang\tfrac{1}{2}c=\frac{c}{2}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{c}{2}\right)^3,\quad \tang^2\tfrac{1}{2}c=\frac{c^2}{4},\quad \tang^3\tfrac{1}{2}c=\frac{c^3}{8}\ldots,$$

et, substitutions faites, il vient

$$200^g - B = A + c \sin A \cot b + \tfrac{1}{4} c^2 \sin 2A . (1 + 2\cot^2 b) + \tfrac{1}{12} c^3 \sin 3A \cot b\,(3 + 4\cot^2 b) + \tfrac{1}{12} c^3 \sin A \cot b,$$

$$C = \frac{c}{\sin b} \sin A + \tfrac{1}{2} \frac{c^2}{\sin b} \sin 2A . \cot b + \tfrac{1}{12} \frac{c^3}{\sin b} \sin 3A\,(1 + 4\cot^2 b) + \tfrac{1}{12} \frac{c^3}{\sin b} \sin A.$$

Enfin, à cause de $\sin 2A = 2\sin A \cos A$, et de $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A = 3\sin A - 4\sin A(1 - \cos^2 A) = -\sin A + 4\sin A \cos^2 A$, on a

$$\text{(I).}\quad 200^g - B = A + c \sin A \cot b + \tfrac{1}{2} c^2 \sin A \cos A . (1 + 2\cot^2 b) + \tfrac{1}{3} c^3 \sin A \cos^2 A \cot b (3 + 4\cot^2 b) - \tfrac{1}{6} c^3 \sin A \cot b (1 + 2\cot^2 b),$$

$$\text{(II).}\quad C = \frac{c}{\sin b} \sin A + \frac{c^2}{\sin b} \sin A \cos A \cot b + \tfrac{1}{3} \frac{c^3}{\sin b} \sin A \cos^2 A (1 + 4\cot^2 b) - \tfrac{1}{3} \frac{c^3}{\sin b} \sin A \cot^2 b.$$

Il reste, pour compléter la solution du problème dont il s'agit, à trouver le côté a en fonction des mêmes données b, c, A. Or, de l'équation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

on déduit aisément celles-ci :

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \sin^2 \tfrac{1}{2} b \cos^2 \tfrac{1}{2} c + \cos^2 \tfrac{1}{2} b \sin^2 \tfrac{1}{2} c - 2\sin \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c \cos A,$$
$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \cos^2 \tfrac{1}{2} b \cos^2 \tfrac{1}{2} c + \sin^2 \tfrac{1}{2} b \sin^2 \tfrac{1}{2} c + 2\cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c \cos A;$$

d'où l'on voit que $\sin \frac{1}{2} a$ peut être considéré comme le troisième côté d'un triangle rectiligne dont on connaît les deux côtés..... $\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c$, $\cos \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c$, et l'angle A compris. Appliquant donc la méthode de l'art. 93, on a, en logarithmes vulgaires ,

$$\log \sin \tfrac{1}{2} a = \log(\sin \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c) - M \frac{\tang \frac{1}{2} c}{\tang \frac{1}{2} b} \cos A - M \frac{\tang^2 \frac{1}{2} c}{2 \tang^2 \frac{1}{2} b} \cos 2A - \ldots$$

et

$$\log \cos \tfrac{1}{2} a = \log(\cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c) + M \frac{\tang \frac{1}{2} c}{\cot \frac{1}{2} b} \cos A - M \frac{\tang^2 \frac{1}{2} c}{2 \cot^2 \frac{1}{2} b} \cos 2A + \ldots$$

M étant le module 0,4342945; par conséquent en soustrayant, l'on a

en logarithmes népériens

$$\begin{aligned}\log.\tang\tfrac{1}{2}a = \log.\tang\tfrac{1}{2}b &- \tang\tfrac{1}{2}c\,[\tang\tfrac{1}{2}b + \cot\tfrac{1}{2}b]\cos A\\ &+ \tfrac{1}{2}\tang^2\tfrac{1}{2}c\,[\tang^2\tfrac{1}{2}b - \cot^2\tfrac{1}{2}b]\cos 2A\\ &- \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}c\,[\tang^3\tfrac{1}{2}b + \cot^3\tfrac{1}{2}b]\cos 3A + \ldots.\end{aligned}$$

Cette série n'est pas sous une forme commode pour procurer la valeur de a en une autre série qui procède, comme les deux précédentes, suivant les puissances de c. Cependant si on voulait en déduire cette valeur, il faudrait supposer d'abord

$$\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}b + P\tang\tfrac{1}{2}c + Q\tang^2\tfrac{1}{2}c + R\tang^3\tfrac{1}{2}c\ldots,$$

P, Q, R... étant des coefficiens indéterminés, puis prendre la tangente des deux membres, ensuite les logarithmes, et développer en série suivant les puissances de $\tang\frac{1}{2}c$; ce qui donnerait avec un peu d'attention,

$$\begin{aligned}\log.\tang\tfrac{1}{2}a = \log.\tang\tfrac{1}{2}b &+ \tang\tfrac{1}{2}c\,[\tang\tfrac{1}{2}b + \cot\tfrac{1}{2}b]\,P\\ &+ \tang^2\tfrac{1}{2}c\Big[Q(\tang\tfrac{1}{2}b + \cot\tfrac{1}{2}b) + \tfrac{P^2}{2}(\tang^2\tfrac{1}{2}b - \cot^2\tfrac{1}{2}b)\Big]\\ &+ \tang^3\tfrac{1}{2}c\Big[R(\tang\tfrac{1}{2}b + \cot\tfrac{1}{2}b) + \tfrac{P^3}{3}(\tang\tfrac{1}{2}b + \cot\tfrac{1}{2}b)\\ &+ PQ(\tang^2\tfrac{1}{2}b - \cot^2\tfrac{1}{2}b) + \tfrac{P^3}{3}(\tang^3\tfrac{1}{2}b + \cot^3\tfrac{1}{2}b)\Big].\end{aligned}$$

Alors en égalant terme à terme cette valeur avec la précédente, on aurait, après diverses transformations,

$$\begin{aligned}P &= -\cos A,\\ Q &= \cot b\sin^2 A,\\ R &= 2(\tfrac{1}{3} + \cot^2 b)\cos A\sin^2 A + \tfrac{1}{3}\cos A,\end{aligned}$$

et définitivement

$$\text{(III)}.\quad a = b - c\cos A + \tfrac{1}{2}c^2\cot b\sin^2 A + \tfrac{1}{3}c^3\cos A\sin^2 A\,(\tfrac{1}{3} + \cot^2 b).$$

Il faut convenir que cette solution, malgré son élégance, est extrêmement laborieuse; mais en voici une autre purement élémentaire qui n'a pas cet inconvénient.

99. 2e *Solution*. Dans le triangle sphérique A, B, C on a

(1) $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

(2) $$\operatorname{tang} B = \frac{\sin A}{\cot b \sin c - \cos c \cos A},$$

(3) $$\operatorname{tang} C = \frac{\sin A}{\cot c \sin b - \cos b \cos A}.$$

Ordonnons d'abord le second membre de l'équation (1) par rapport aux puissances ascendantes de l'arc c, en y mettant au lieu de $\sin c$ et $\cos c$ leurs valeurs en séries (art. 91); on aura, en s'arrêtant aux termes en c^3,

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + \sin b\left(c - \frac{c^3}{2.3}\right)\cos A \\ &= \cos b + c \sin b \cos A - \tfrac{1}{2}c^2 \cos b - \tfrac{1}{6}c^3 \sin b \cos A,\end{aligned}$$

ce qui fait voir que

(4) $$a = b + cP + c^2Q + c^3R + \ldots,$$

P, Q, R..... étant des coefficiens indéterminés. Prenant donc le cosinus de chaque membre de cette série hypothétique, il viendra

$$\begin{aligned}\cos a = \cos b - cP \sin b - c^2 &\left| \begin{array}{l} Q \sin b - c^3 \\ P^2 \cos b - c^3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \left(R - \frac{P^3}{6}\right)\sin b \\ PQ \cos b; \end{array} \\ - \tfrac{1}{2}c^2 &\end{aligned}$$

et comparant terme à terme cette valeur de $\cos a$ avec la précédente, on trouvera, après quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned} P &= -\cos A, \\ Q &= +\tfrac{1}{2}\cot b \sin^2 A, \\ R &= +\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} + \cot^2 b\right)\cos A \sin^2 A; \end{aligned}$$

ainsi portant ces valeurs dans la série (4), on obtiendra la série (III) précédente.

Le moyen de déterminer maintenant l'angle B est de faire

$$\operatorname{tang}(200^G - A - B) = \operatorname{tang}(\overline{100 - A} + \overline{100 - B}) = \operatorname{tang} x,$$

car $200^G - A - B$ étant un très petit angle, on pourra le développer en série suivant les puissances de sa tangente. En effet,

$$\operatorname{tang} x = \frac{\cot A \operatorname{tang} B + 1}{\operatorname{tang} B - \cot A};$$

et si pour tang B on met sa valeur (2), on aura

$$\tang x = \frac{\sin A \cos A (1 - \cos c) + \cot b \sin c \sin A}{1 - \cos^2 A (1 - \cos c) - \cot b \sin c \cos A}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} c^2 \sin A \cos A + \left(c - \frac{c^3}{6}\right) \sin A \cot b}{1 - \frac{c^2}{2} \cos^2 A - \left(c - \frac{c^3}{6}\right) \cos A \cot b}.$$

Réduisant le second membre en série par la formule du binome, on obtiendra, après les réductions,

$$\begin{aligned}\tang x = c \sin A \cot b &+ c^2 \sin A \cos A \left(\tfrac{1}{2} + \cot^2 b\right) \\ &+ c^3 \sin A \cos^2 A \cot b (1 + \cot^2 b) \\ &- \frac{c^3}{6} \sin A \cot b.\end{aligned}$$

Mais en général

$$x = \tang x - \tfrac{1}{3} \tang^3 x + \ldots;$$

ainsi substituant ici pour tang x sa valeur précédente, et faisant attention que $\sin^3 A = \sin A (1 - \cos^2 A)$, l'on retombera sur la série (I).

Il reste à obtenir l'angle C. Or, l'équation (3) devient, en y mettant pour tang c sa valeur en série,

$$\tang C = \frac{\sin A \tang c}{\sin b - \cos A \cos b \tang c}$$

$$= \frac{\sin A \left(c + \frac{c^3}{3}\right)}{\sin b \left[1 - \cos A \cot b \left(c + \frac{c^3}{3}\right)\right]},$$

puis développant en série, il viendra

$$\begin{aligned}\tang C = c \frac{\sin A}{\sin b} + c^2 \frac{\sin A \cos A \cot b}{\sin b} + \frac{c^3}{3} \frac{\sin A}{\sin b} \\ + c^3 \frac{\sin A \cos^2 A \cot^2 b}{\sin b};\end{aligned}$$

et parce que

$$C = \tang C - \tfrac{1}{3} \tang^3 C + \ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned}C = c \frac{\sin A}{\sin b} &+ c^2 \frac{\sin A \cos A \cot b}{\sin b} \\ &+ c^3 \left[\frac{1}{3} \frac{\sin A}{\sin b} + \frac{\sin A \cos^2 A \cot^2 b}{\sin b} - \frac{1}{3} \frac{\sin^3 A}{\sin^3 b}\right];\end{aligned}$$

mais

$$\sin^3 A = \sin A\,(1 - \cos^2 A), \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin^3 b} = \frac{1 + \cot^2 b}{\sin b};$$

substituant ces valeurs dans celle de C précédente, on retrouvera enfin la série (II).

Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère.

100. La résolution des triangles sphériques très peu courbes, se ramène immédiatement à celle des triangles rectilignes, au moyen d'un théorème très remarquable dû à M. Legendre, et qui est de la plus grande utilité dans les opérations géodésiques. En voici l'énoncé et la démonstration.

Le triangle sphérique très peu courbe, dont les angles sont A, B, C, *et les côtés opposés* a, b, c, *répond toujours à un triangle rectiligne qui a les côtés de même longueur, et dont les angles sont* $A - \frac{1}{3}\epsilon$, $B - \frac{1}{3}\epsilon$, $C - \frac{1}{3}\epsilon$, ϵ *étant l'excès de la somme des angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits.*

Puisque a, b, c sont les côtés d'un triangle sphérique construit sur une sphère dont nous désignerons le rayon par r; un triangle semblable, tracé sur la sphère dont le rayon $= 1$, aura pour côtés $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$; et par l'art. 64,

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}.$$

Mais pour abréger, nous représenterons respectivement $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ par α, β, γ, et nous aurons

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

r étant fort grand par rapport aux côtés a, b, c, il s'ensuit, sans erreur sensible, que

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4}, \qquad \sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{2.3};$$

il en sera de même des valeurs de $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et $\sin\gamma$.

De là l'équation précédente deviendra

$$\cos A = \frac{\frac{1}{2}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)+\frac{1}{24}(\alpha^4-\beta^4-\gamma^4)-\frac{1}{4}\beta^2\gamma^2}{\beta\gamma(1-\frac{1}{6}\beta^2-\frac{1}{6}\gamma^2)}.$$

Transportant au numérateur le facteur $(1-\frac{1}{6}\beta^2-\frac{1}{6}\gamma^2)$ élevé à la puissance -1, développant jusqu'aux quantités du quatrième ordre inclusivement, et réduisant, on aura

$$\cos A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}+\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2}{24\beta\gamma};$$

remettant les valeurs de α, β, γ, le second membre sera toujours composé de la même combinaison de lettres, et pourra être représenté par

$$\cos A = \frac{M}{2bc}+\frac{N}{24bcr^2} \qquad (1).$$

Soit maintenant A' l'angle opposé au côté a, dans le triangle rectiligne dont les côtés seraient égaux en longueur aux arcs a, b, c; on aura,

$$\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{M}{2bc};$$

élevant les deux membres au quarré, et mettant $1-\sin^2 A'$ au lieu de $\cos^2 A'$, il viendra

$$-4b^2c^2\sin^2 A' = a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 = N.$$

L'équation (1) sera donc ramenée à la forme

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2}\sin^2 A'.$$

Soit $A = A' + x$; on aura, en rejettant la seconde puissance de x,

$$\cos A = \cos A' - x\sin A';$$

d'où l'on tire, après la substitution de la valeur de $\cos A$,

$$x = \frac{bc}{6r^2}\sin A'.$$

Nous voyons par là que x est du second ordre par rapport à $\frac{b}{r}$ et $\frac{c}{r}$; ainsi ce résultat est exact, aux quantités près du quatrième ordre.

Donc à cause de $A = A' + x$,

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2} \sin A';$$

mais $\frac{1}{2} bc \sin A'$ est visiblement l'aire du triangle rectiligne dont a, b, c sont les côtés, laquelle ne diffère pas sensiblement de celle du triangle sphérique proposé; donc si l'une ou l'autre aire est appelée s, on aura

$$A' = A - \frac{s}{3r^2},$$

et semblablement,

$$B' = B - \frac{s}{3r^2},$$

$$C' = C - \frac{s}{3r^2},$$

d'où il résulte

$$A' + B' + C' = 2^{\text{o}} = A + B + C - \frac{s}{r^2}.$$

On peut donc considérer $\frac{s}{r^2}$ comme étant l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits, et l'on doit remarquer que dans tout ce calcul, les angles des deux triangles sont censés mesurés par des arcs de cercle dont le rayon est l'unité. Telle est la démonstration donnée par Lagrange, dans son excellent *Mémoire sur la Trigonométrie sphérique* (6e nº du *Journal de l'École Polytechnique*).

L'*excès sphérique* $\varepsilon = \frac{s}{r^2}$, qui est proportionnel à l'aire du triangle, peut toujours se calculer *à priori*, et cela en considérant le triangle sphérique proposé comme rectiligne. Si donc deux côtés b, c et l'angle compris A sont donnés, on aura l'aire $s = \frac{1}{2} bc \sin A$. Si au contraire on connaît un côté a et les deux angles adjacens B, C, on aura l'aire $s = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}$. Cette formule n'est qu'une transformation de la précédente; car il est évident, 1°. que $\sin A = \sin(B+C)$, 2°. que $b = \frac{a \sin B}{\sin(B+C)}$; 3°. et que $c = \frac{a \sin C}{\sin(B+C)}$, art. 47.

La remarque de l'art. 91 est encore applicable dans cette circonstance, où il s'agit d'avoir l'*excès sphérique* ε en secondes; ainsi,

$$\varepsilon = \frac{s}{r^2} R''.$$

La valeur de ε étant toujours d'un petit nombre de secondes, il s'ensuit que celle de l'aire du triangle n'a pas besoin d'être déterminée avec une grande précision. Mais veut-on savoir ce qu'on néglige en calculant s par le procédé qu'on vient d'indiquer? on n'aura qu'à développer en série l'expression

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} s = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} b \sin C}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2} b \cos C},$$

démontrée à l'art. 89, et l'on trouvera, par la méthode de l'art. 93,

$$\tfrac{1}{2} s = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b \sin C - \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} b \sin 2C$$
$$+ \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} a \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} b \sin 3C - \text{etc.};$$

d'où l'on voit qu'en ne prenant que le premier terme de la série, on néglige des quantités du quatrième ordre et des ordres supérieurs, qui sont tout-à-fait insensibles dans la pratique de la Géodésie; on a donc

$$\tfrac{1}{2} s = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b \sin C,$$

et enfin

$$s = \tfrac{1}{2} ab \sin C,$$

en substituant en outre aux tangentes des petits arcs leurs valeurs en séries, et ne conservant que le terme du second ordre, qui est le plus considérable. Il résulte de là que l'aire d'un triangle sphérique peu courbe, peut s'évaluer comme celle d'un triangle rectiligne.

CHAPITRE IV.

Méthodes particulières et générales d'interpolation des lignes trigonométriques.

101. Les logarithmes des lignes trigonométriques ainsi que ceux des nombres, qui sont insérés dans les Tables, correspondent à des quantités entre lesquelles on est, à chaque instant, obligé d'interpoler d'autres logarithmes; mais cette interpolation est souvent très pénible, et même peu exacte lorsqu'on fait usage de grandes Tables à dix décimales, telles que celles de Vlacq, et quand les arcs donnés sont très petits. Quoique dans la pratique de la Géodésie l'on ait peu à craindre l'influence des erreurs de ce genre, cependant il convient de donner une idée des moyens par lesquels on peut en préserver les résultats que l'on cherche, lorsqu'on désire obtenir la plus grande exactitude possible. Ces moyens, dont il s'agira ici, sont ceux que M. Legendre a expliqués dans la *Connaissance des Tems* pour 1819.

Soit x un très petit arc, exprimé en parties du rayon $=1$, et supposons qu'on veuille les logarithmes de son sinus, de son cosinus et de sa tangente; on commencera par mettre les trois premières formules de l'art. 91 sous cette forme,

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots\right),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots,$$
$$\operatorname{tang} x = x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{15} + \ldots\right);$$

ensuite on prendra les logarithmes des deux membres de chacune des deux premières, et l'on aura, après les réductions,

$$\log.\sin x = \log x - \frac{Mx^2}{6} - \frac{Mx^4}{180} - \frac{Mx^6}{2835} - \text{etc.},$$
$$\log.\cos x = \quad - \frac{Mx^2}{2} - \frac{Mx^4}{12} - \frac{Mx^6}{45} - \text{etc.};$$

faisant la même opération sur la troisième formule, ou, ce qui est plus simple, soustrayant log cos x de log sin x, il vient

$$\log.\tang x = \log x + \frac{Mx^2}{3} + \frac{7Mx^4}{90} + \frac{62Mx^6}{2835} + \text{etc.},$$

séries dans lesquelles le module $M = 0{,}43429\ldots$ a pour logarithme vulgaire

$$\log M = 9{,}63778\ 43113\ 00537.$$

On abrègera de beaucoup les calculs en évaluant chaque terme séparément à l'aide des logarithmes; mais il faut faire attention de réduire x en parties du rayon, si cet arc est donné en degrés, ou en minutes, ou en secondes, afin de le ramener à l'hypothèse de la formule; c'est-à-dire qu'il faut le diviser par R°, ou R', ou R''. Comme l'opération est beaucoup plus commode et plus prompte par les logarithmes, on fera, dans ce cas, usage des valeurs suivantes :

$$\log R^\circ = 1{,}75812\ 26324\ 09172,$$
$$\log R' = 3{,}53627\ 38827\ 92816,$$
$$\log R'' = 5{,}31442\ 51331\ 76459.$$

Les séries ci-dessus sont tellement convergentes, que si l'on se borne à dix décimales, et que x soit plus petit que $6^\circ 7'$, on pourra s'arrêter aux termes en x^6.

Des formules connues

$$x = \sin\ x\left(1 + \tfrac{1}{2}.\frac{\sin^2 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\sin^4 x}{5} + \text{etc.}\right),$$
$$x = \tang\ x\ (1 - \tfrac{1}{3}\tang^2 x + \tfrac{1}{5}\tang^4 x - \text{etc.});$$

on déduit par le même procédé,

$$\log x = \log\sin\ x + \frac{M}{6}\sin^2 x + \frac{11M}{180}\sin^4 x + \text{etc.},$$
$$\log x = \log.\tang x - \frac{M}{3}\tang^2 x + \frac{13M}{90}\tang^4 x - \text{etc.};$$

ce qui donne le moyen de trouver l'arc dont le logarithme sinus ou le logarithme tangente est donné.

M. Legendre substitue aux formules précédentes d'autres formules plus avantageuses, lorsque l'arc passe une certaine limite. On arrive à celles-ci en développant en série l'expression générale log. sin $(a+x)$.

Or, si pour abréger, l'on fait $\log \sin a = z$, le théorème de Taylor donnera

$$\log \sin (a+x) = z + \frac{dz}{da}.x + \frac{d^2z}{da^2}.\frac{x^2}{2} + \frac{d^3z}{da^3}.\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.};$$

mais les coefficiens différentiels devant se rapporter aux logarithmes vulgaires ou de Briggs, on a

$$\frac{dz}{da} = M \cot a, \qquad \frac{d^2z}{da^2} = -\frac{M}{\sin^2 a}, \qquad \frac{d^3z}{da^3} = \frac{2M\cos a}{\sin^3 a}, \text{ etc.};$$

partant,

$$\log \sin (a+x) = \log \sin a + Mx \cot a \left(1 - \frac{x}{\sin 2a} + \frac{x^2}{3\sin^2 a}\right) - \text{etc.}$$

Il sera tout aussi facile de trouver que

$$\log \cos (a+x) = \log \cos a - Mx \operatorname{tang} a \left(1 + \frac{x}{\sin 2a} + \frac{x^2}{3\cos^2 a}\right) - \text{etc.},$$

$$\log \operatorname{tang}(a+x) = \log \operatorname{tang} a + \frac{2Mx}{\sin 2a}(1 - x\cot 2a + \tfrac{8}{3}x^2 + \tfrac{4}{3}x^2\cot^2 2a) + \text{etc.}$$

On emploiera ces formules, quand le logarithme du sinus, du cosinus ou de la tangente tombera dans les tables entre deux arcs consécutifs a, $a+h$.

102. Proposons-nous maintenant de déduire x de l'équation

$$\log.\operatorname{tang}(a+x) - \log \operatorname{tang} a = r = 2Mp \qquad (1).$$

On regardera x comme une fonction de p; et puisque ces deux quantités deviennent nulles en même tems, on aura, en recourant au théorème de Maclaurin,

$$x = \left(\frac{dr}{dp}\right)p + \left(\frac{d^2x}{dp^2}\right)\frac{p^2}{2} + \left(\frac{d^3x}{dp^3}\right)\frac{p^3}{2.3} + \text{etc.},$$

série dans laquelle les coefficiens différentiels doivent correspondre à $x = 0$. Mais en général, par les différenciations successives, l'équation (1) donne

$$\frac{dx}{dp} = \sin(2a+2x),$$

$$\frac{d^2x}{dp^2} = 2\cos(2a+2x).\frac{dx}{dp} = \sin(4a+4x),$$

$$\frac{d^3x}{dp^3} = 4\cos(4a+4x).\frac{dx}{dp} = 4\sin(2a+2x)\cos(4a+4x), \text{ etc.};$$

par conséquent, faisant $x = 0$ dans ces coefficiens, il vient définitivement

$$x = p \sin 2a + \frac{p^2}{2} \sin 4a + \frac{2p^3}{3} \sin 2a \cos 4a + \text{etc.} \qquad (2).$$

Si on avait à résoudre l'équation

$$\log \sin (a + x) - \log \sin a = r \qquad (3),$$

on ferait $r = Mp \cot a$, et en passant aux différentielles successives, on aurait

$$\frac{dx}{dp} = \tang (a + x) \cot a,$$
$$\frac{d^2x}{dp^2} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{\cot a}{\cos^2 (a + x)},$$
$$\frac{d^3x}{dp^3} = \frac{d^2p}{dp^2} \cdot \frac{\cot a}{\cos^2 (a + x)} + \frac{2 \cot a \sin (a + x)}{\cos^3 (a + x)};$$

mais comme il faut ensuite faire $x = 0$, dans ces coefficiens différentiels, on a plus simplement

$$\left(\frac{dx}{dp}\right) = 1, \quad \left(\frac{d^2x}{dp^2}\right) = \frac{2}{\sin 2a}, \quad \left(\frac{d^3x}{dp^3}\right) = \frac{2.2}{\sin^2.2a} + \frac{4.2\sin^2 a}{\sin^2.2a};$$

de là

$$x = p\left[1 + \frac{p}{\sin 2a} + \frac{2p^2}{3\sin^2.2a}(1 + 2\sin^2 a)\right] \qquad (4),$$

en se bornant aux termes en p^3.

103. Les deux questions que l'on vient de traiter sont relatives aux tables trigonométriques. Il en existe d'analogues pour les tables des nombres; les voici :

Soit $\log A$ un logarithme donné, dont il faut trouver le nombre A correspondant, au moyen de grandes tables de logarithmes. On choisira, parmi les logarithmes de ces tables, celui dont les quatre ou cinq chiffres décimaux soient communs avec $\log A$, et l'on aura

$$\log A = \log a + r.$$

Passant de là aux nombres, il viendra

$$A = ae^{\mu r},$$

e désignant le nombre dont le logarithme hyperbolique ou népérien $= 1$, et μ étant le module qui sert pour passer des logarithmes ordinaires aux logarithmes hyperboliques, c'est-à-dire que...

$\mu = \frac{1}{M} = \frac{1}{0,43429} = 2,3025\ldots$; ainsi,

$$A - a = a(e^{\mu r} - 1) = ae^{\frac{1}{2}\mu r}(e^{\frac{1}{2}\mu r} - e^{-\frac{1}{2}\mu r});$$

mais en général

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{1.2} - \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} - \text{etc.};$$

conséquemment,

$$A - a = a\mu r.e^{\frac{1}{2}\mu r}\left(1 + \frac{1}{6}.\frac{\mu^2 r^2}{4} + \frac{1}{120}.\frac{\mu^4 r^4}{16} + \text{etc.}\right);$$

enfin, prenant le logarithme vulgaire de chaque membre, on a

$$\log(A - a) = \log(a\mu r) + \tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{24}\mu r^2 - \tfrac{1}{2880}\mu^3 r^4 + \text{etc.} \qquad (5).$$

S'il s'agissait de la formule

$$\log A = \log a - r,$$

on aurait cette série,

$$\log(a - A) = \log(a\mu r) - \tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{24}\mu r^2 - \tfrac{1}{2880}\mu^3 r^4 + \text{etc.} \qquad (6).$$

La convergence de ces deux séries permet le plus souvent de s'arrêter aux termes en r.

104. On résout analytiquement le problème inverse avec la plus grande facilité. En effet, soit A un nombre donné, dont on demande le logarithme exact jusqu'à la quatorzième décimale : on choisira, dans les grandes tables, un nombre a qui ait les cinq premières figures communes avec A, et l'on fera

$$A - a = r,$$

après quoi l'on aura

$$\log A = \log a + M\left(\frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{r^3}{3a^3} - \text{etc.}\right) \qquad (7).$$

On suppose, dans cette circonstance, que l'on n'a à sa disposition que la table ordinaire des logarithmes à vingt décimales, pour tous les nombres depuis 1 jusqu'à 1161 ou 1200; alors pour trouver le nombre a, on cherchera dans la Table des diviseurs les plus simples des nombres, par M. Burckhardt, un nombre très peu différent de

celui qu'expriment les quatre ou cinq premières figures de A, et dont les facteurs soient plus petits que 1161, afin que leurs logarithmes puissent se trouver dans la table avec toute l'exactitude désirable.

105. Un autre problème non moins important à résoudre est celui-ci : Etant donnés séparément log B et log C, trouver le logarithme de $B+C$ ou celui de $B-C$, c'est-à-dire réduire deux termes à un seul.

Supposons $C<B$; on fera $\frac{C}{B}=A$, et l'on aura

$$\log A = \log C - \log B,$$
$$\log(B+C) = \log B + \log(1+A).$$

Maintenant soit a un nombre fort approché de A, et dont le logarithme se trouve dans les tables, ainsi que $\log(1+a)$ ou $\log(1-a)$; on aura

$$\log A = \log a \pm r,$$

r étant une très petite quantité qu'il faut déterminer avec beaucoup de préc[illegible]. Si l'on passe de là aux nombres, on aura comme ci-dessus,

$$A = ae^{\mu r},$$

ou bien

$$1+A = 1+ae^{\mu r}+a-a;$$

par suite

$$1+A=(1+a)\left[1-\left(\frac{a}{1+a}\right)(1-e^{\mu r})\right].$$

Soit $b=\frac{a}{a+1}$; on pourra écrire

$$1+A=(1+a)\left[1-b(1-e^{\mu r})\right];$$

et prenant les logarithmes vulgaires de chaque membre, il viendra

$$\log(1+A)=\log(1+a)-Mb(1-e^{\mu r})-M\frac{b^2}{2}(1-e^{\mu r})^2-\text{etc.},$$

M étant toujours le module 0,43429448. Mais

$$e^{\mu r}=1+\mu r+\text{etc.};$$

on a donc, à cause de $\mu M=1$,

$$\log(1+A)=\log(1+a)\pm br+\frac{b(1-b)}{2}\mu r^2\pm\text{etc.} \qquad (8);$$

et si l'on fait $b = \frac{a}{1-a}$, on aura de même

$$\log(1-A) = \log(1-a) \mp br - \frac{b(1+b)}{2}\mu r^2 \mp \text{etc.} \qquad (9).$$

Pour des tables ordinaires à sept décimales, il suffit de tenir compte du terme en r. M. Legendre pense qu'à l'aide de ces dernières on peut calculer aisément toutes les formules trigonométriques à deux termes, parce que l'on évite l'emploi des angles auxiliaires, qui allongent souvent les opérations numériques. C'est pour cette raison que nous sommes entrés dans quelques détails à ce sujet.

106. On peut substituer à ces formules particulières d'interpolation une formule générale qui dispense de connaître la loi d'après laquelle se forment les termes successifs des tables.

Soient A, A', A'', A''', etc., les termes consécutifs d'une série correspondans aux indices en progression arithmétique ou par *différences*, a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, etc.; on aura un terme quelconque y ou $A_{(n)}$ correspondant à l'indice $a+nh$ par la formule suivante, démontrée à la page 517 du *Traité élémentaire de Calcul intégral*, par M. Lacroix, savoir :

$$A_{(n)} = A + n\delta A + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 A + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\delta^3 A + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}\delta^4 A + \text{etc.} \qquad (10),$$

dans laquelle δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$, etc., désignent les différences 1re, 2e, 3e, etc. de A, supposées continuellement décroissantes et positives. Lorsque les tables ne donnent que les différences premières, il faut, par des soustractions successives, former les différences ultérieures; après quoi l'on évalue les termes de la série précédente, en poussant l'approximation jusqu'au degré de précision que comportent les tables. Si, par exemple, on employait celles de Vlacq qui sont à dix décimales, il suffirait de n'avoir égard qu'aux différences secondes; ainsi on aurait simplement

$$A_{(n)} = A + n\left(\delta A + \frac{n-1}{2}\delta^2 A\right) \qquad (11),$$

et de là, en faisant $A_{(n)} = y$, on tirerait

$$n = \frac{y-A}{\delta A + \frac{n-1}{2}\delta^2 A} \qquad (12),$$

c'est-à-dire que pour trouver n par le moyen de y, on négligerait d'abord au dénominateur le terme du second ordre $\frac{n-1}{2}\delta^2 A$, pour avoir une première valeur approchée de n qui serait $n = \frac{y-A}{\delta A}$, et à l'aide de laquelle on évaluerait d'une manière suffisamment exacte le terme négligé. Ensuite on déterminerait une seconde valeur de n par la formule entière (12) : elle représenterait alors le véritable indice cherché, et l'on n'aurait plus qu'à évaluer la variable $a + nh$ correspondante à la quantité y donnée. De cette manière on obtiendrait dix décimales pour les logarithmes et dix chiffres significatifs pour les nombres.

107. *Exemple I.* Supposons qu'on demande l'angle $A_{(n)}$ donné par la valeur log. sin $A_{(n)} = 9.55797\ 90661\ 2900$, et qu'on ait à sa disposition les grandes tables de la *Trigonometria Britannica* calculées pour des intervalles d'un centième de degré; on verra de suite que l'angle $A_{(n)}$ est compris entre 21°,18 et 21°,19.

Soit donc $a = 21°,18$; on aura immédiatement, à cause de la relation (3),

$$\begin{aligned} \log.\sin a &= 9{,}55786\ 68865\ 3682, \\ \text{mais } \log.\sin A_{(n)} &= \underline{9{,}55797\ 90661\ 2900;} \\ \text{ainsi, différence } r &= \quad 11\ 21795\ 9218. \end{aligned}$$

Maintenant calculant seulement les deux premiers termes de la série (4), on a, en les évaluant en degrés,

$$\begin{aligned} \log r &= 6{,}04991\ 38568\ 33 \\ \log\left(\tfrac{1}{M} = \mu\right) &= 0{,}36221\ 56887\ 00 \\ \log.\text{tang } a &= \underline{9{,}58824\ 13447\ 98} \\ \log p &= 6{,}00037\ 08903\ 31 \\ \log R^\circ &= \underline{1{,}75812\ 26324\ 09} \\ \log [1] &= 7{,}75849\ 35227\ 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\sin 2a &= 9{,}82852\ 24 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\underline{6{,}00037\ 09} \\ \log.p:\sin 2a &= 6{,}17184\ 85 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\underline{7{,}75849\ 35} \\ \log [2] &= 3{,}93034\ 20; \end{aligned}$$

mais à cause de $A_{(n)} = a + x$, et de $x = [1] + [2] +$ etc., on a

$$\begin{aligned} a + [1] &= 21°{,}18573\ 44731\ 384 \\ [2] &= \underline{\qquad\qquad 8518\ 085} \\ \text{angle cherché } A_{(n)} &= 21°{,}18573\ 53249\ 469. \end{aligned}$$

Les termes en p^3 que nous avons négligés n'augmenteraient que d'une unité la dixième décimale : leur valeur est 1.064.

Pour vérifier ce résultat par la formule générale d'interpolation, il faudra former le tableau suivant au moyen des différences premières δA prises dans la table.

a	log a ou A	δA	$\delta^2 A$	$\delta^3 A$	$\delta^4 A$
21°,18	9,55786 68865 3682	19 55725 3125	— 1012 5448	9111	— 12
		19 54712 7677	— 1011 6337	9099	
		19 53701 1340	— 1010 7238		
		19 52690 4102			

Or, on a $h = 0°,01$ et

$$A_{(n)} = a + (0°,01)\, n = y;$$

et puisque d'après la formule générale d'interpolation rapportée ci-dessus,

$$y - A = n\left[\delta A + \frac{n-1}{2}\left(\delta^2 A + \frac{n-2}{3}\delta^3 A\right)\right],$$

que d'ailleurs

$$y - A = \log.\sin A_{(n)} - \log a = 11\ 21795\ 9218,$$

on trouvera, par la méthode des approximations successives indiquée plus haut, que la valeur approchée de n, en négligeant d'abord les différences 3e et 4e, est $n = 0,57353\ 26$, et qu'ensuite on a plus exactement $n = 0,57353\ 25052\ 70$; ainsi définitivement l'angle cherché ou

$$A_{(n)} = a + (0°,01)\, n = 21°,18573\ 53250\ 527,$$

à très peu près comme ci-dessus.

Exemple II. On propose de trouver le nombre A, sachant que

$$\log A = 9,63778\ 43113\ 00537.$$

Les Tables de Callet, qui sont à sept décimales, font d'abord connaître que $A = 0,4342945$. Prenant pour les cinq premiers chiffres décimaux 43430 ; ce nombre, ou simplement 4343, est le produit de 43 par 101. Comme il approche de celui qu'on désire trouver, on fera

$$a = 0,4343 = 0,43 \times 1,01,$$

et par la table I à vingt décimales qu'on trouve aussi dans celles de Callet, on a

$$\log.0{,}43 = 9{,}63346\ 84555\ 79586\ 5$$
$$\log 1{,}01 = 0{,}00432\ 13737\ 82642\ 6$$

de là $\log a = 9{,}63778\ 98293\ 62229$

mais $\log A = 9{,}63778\ 43113\ 00537$

donc, différence ou $r = 55180\ 61692.$

Calculant maintenant la formule (6), qu'on peut réduire à celle-ci :

$$\log(a - A) = \log(a\mu r) - \tfrac{1}{2} r,$$

on a

$$\log r = 4{,}74178\ 65516$$
$$\log \mu = 0{,}36221\ 56887$$
$$\log a = 9{,}63778\ 98293\ 6$$
$$-\tfrac{1}{2} r = -\ 27590\ 3$$
$$\log(a - A) = 4{,}74178\ 93106.$$

De là

$$a - A = 0{,}00000\ 55180\ 96748;$$

et puisque

$$a = 0{,}43430,$$

on a enfin

$$A = 0{,}43429\ 44819\ 03252;$$

c'est précisément le module que nous avons désigné ci-dessus par M.

Exemple III. On demande le logarithme du nombre..... $A = 3{,}14159\ 26535\ 89793$, approché jusqu'à la quinzième décimale; ce nombre est, comme on le voit bien, la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à l'unité.

Soit $a = 3{,}1416 = 1{,}68 \times 1{,}87$; on aura

$$a - A = r = 0{,}00000\ 73464\ 10207,$$

et la formule (7), en y faisant r négatif, puisque $a > A$, deviendra

$$\log A = \log a - \frac{Mr}{a}\left(1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{r}{a} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{r^2}{a^2}\right);$$

en l'évaluant par le moyen des logarithmes, on aura

$$\log 1{,}68 = 0{,}22530\ 92817\ 25862\ 85$$

$$\log 1{,}87 = 0{,}27184\ 16065\ 36498\ 97 \qquad \log r = 4{,}86607\ 51747$$

$$\log a = 0{,}49715\ 08882\ 62361\ 82 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0{,}49715\ 08883$$

$$[1] = -\qquad 10155\ 67040\ 5 \qquad \log \frac{r}{a} = 4{,}36892\ 42864$$

$$0{,}49714\ 98726\ 95321\ 3 \qquad \log M = 9{,}63778\ 43113$$

$$[2] = -\qquad 1187\ 4 \qquad \log.[1] \quad 4{,}00670\ 85977$$

$$\log A = 0{,}49714\ 98726\ 94134 \qquad \log \frac{r}{2a} = 4{,}06789\ 43$$

$$\log.[2] \quad 8{,}07460\ 29.$$

Tel est le résultat qu'il fallait trouver, et qui est exact jusqu'à la quinzième décimale.

Exemple IV. Soit $\log A = 9{,}33054\ 08833\ 9137$; on demande $\log(1+A)$ avec le même degré d'exactitude.

Pour trouver le nombre a, qui diffère très peu de la valeur approchée $A = 0{,}214063$, M. Legendre réduit cette valeur en fraction continue, et il trouve que l'une des fractions convergentes est $a = \frac{137}{640}$. En effet la fraction

$$\frac{214063}{1000000} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}};$$

ainsi l'on a pour quotiens consécutifs

$$4,\quad 1,\quad 2,\quad 22,\quad 1,\quad 1,\quad \text{etc.},$$

et pour fractions convergentes

$$\frac{0}{1},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{3}{14},\quad \frac{67}{313},\quad \frac{70}{327},\quad \frac{137}{640},\ \text{etc.};$$

c'est-à-dire sur la première ligne on écrit les quotiens 4, 1, 2, etc., puis l'on prend pour première fraction intégrante $\frac{0}{1}$, et pour seconde l'unité divisée par le premier quotient 4; ensuite on multiplie séparément les deux termes de celle-ci par le quotient correspon-

dant, et l'on augmente chaque produit, du numérateur et du dénominateur de la fraction qui précède ; ce qui donne les deux termes de la fraction suivante $\frac{1}{5}$. Enfin l'on opère de la même manière pour déterminer successivement les autres fractions.

La valeur de a étant trouvée, l'on a

$$\begin{aligned} \log a &= 9{,}33054\ 05931\ 7252 \\ \log A &= 9{,}33054\ 08833\ 9137 \\ \hline \log A - \log a = r &= \qquad\qquad 2902\ 1885. \end{aligned}$$

D'ailleurs $1 + a = \frac{777}{640}$; si donc l'on continue d'opérer avec quinze décimales, et qu'on évalue les termes conservés de la formule (8), on aura

$$\begin{aligned} \log(1+a) &= 0{,}08424\ 10448\ 17027 \\ R &= \qquad\qquad 511\ 71163 \\ \hline \text{enfin,} \quad \log(1+A) &= 0{,}08424\ 10959\ 8819\ , \end{aligned}$$

R représentant ici les termes en r et r^2 de la formule.

Exemple V. On sait que $\log \sin\theta = 9.61722\ 43146\ 6214$; on demande $\log\cos\theta$, avec un pareil nombre de décimales?

Soit $A = \sin^2\theta$; on aura $\cos^2\theta = 1 - A$ et $\log\cos\theta = \frac{1}{2}\log(1-A)$; il s'agit donc de déduire $\log(1-A)$ du logarithme donné. Or, en le doublant il vient

$$\log A = 9{,}23444\ 86293\ 2428,$$

et l'on a, pour valeur approchée, $A = 0{,}171573$. Développant, comme ci-dessus, cette valeur en fraction continue, on trouve qu'elle diffère très peu de $\frac{169}{985}$; d'après cela, si on fait $a = \frac{169}{985}$, on aura $1 - a = \frac{816}{985}$; et si on effectue le calcul de la formule (9), comme on vient de faire celui de la formule (8), on trouvera définitivement

$$\log(1-A) = \log.\cos^2\theta = 9{,}91825\ 43103\ 2612,$$

et partant,

$$\log\cos\theta = 9{,}95912\ 71551\ 6306.$$

M. Legendre a donné d'autres applications intéressantes de ses formules; on fera bien d'y recourir, si ce qui précède paraît insuffisant.

LIVRE TROISIÈME.

OPÉRATIONS ET CALCULS GÉODÉSIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Considérations générales sur la formation des canevas des grandes Cartes topographiques.

108. La Géodésie est une partie de la Géométrie appliquée, qui traite de la division des champs; mais suivant l'acception la plus étendue, elle a pour objet la mesure de la Terre, ou celle d'une partie de sa surface. Les *opérations géodésiques* sont donc celles par lesquelles on détermine les positions respectives des principaux lieux d'un pays dont on se propose de lever la carte. L'ensemble de ces opérations forme ce que l'on appelle un *canevas trigonométrique*, parce que les positions dont il s'agit représentent les sommets des angles des triangles qui, par leur enchaînement, composent un réseau continu dans tous les sens. Ces triangles, dont on observe rigoureusement les angles, réunissent les conditions les plus avantageuses, lorsqu'ils sont les plus grands possibles, à peu près équilatéraux, et qu'ils sont liés au moins à une ligne principale, ou *base* que l'on mesure avec beaucoup de soin. Lorsque cette base et les trois angles de chaque triangle sont connus, on a tous les élémens nécessaires pour calculer de proche en proche les distances entre les objets; car un triangle est déterminé de grandeur, quand parmi ses six parties l'on connaît un côté. Le canevas général d'une carte étant ainsi établi, on le divise en canevas partiels, c'est-à-dire que l'on couvre de *triangles secondaires* et *tertiaires* la surface de chaque grand triangle. On conçoit que, par ce moyen, l'on a une

multitude de petites bases et de points rapprochés auxquels ceux qui relèvent les détails à la planchette ou à la boussole, pour former une topographie complète du pays, rattachent continuellement leurs opérations.

L'instrument qu'on a adopté en France vers la fin du XVIIIe siècle, et ensuite dans quelques autres pays de l'Europe, pour mesurer les angles des triangles du premier et du second ordre, ainsi que pour observer les latitudes et les azimuts, est le *cercle répétiteur* de Borda. C'est celui dont nous donnerons particulièrement la description, et dont nous ferons connaître l'usage, à cause de l'extrême précision qu'il procure, même sous d'assez petites dimensions, et de la facilité avec laquelle on l'établit dans le plans des objets (*voyez* les planches III et suivantes).

Mais comme l'axe de la lunette inférieure ne passe pas par celui de l'instrument, l'angle observé a quelquefois besoin d'être corrigé de la petite erreur occasionnée par l'*excentricité* de cette lunette.

Il est même souvent impossible de placer le cercle au centre de la station, et alors l'angle observé doit encore éprouver une correction, que l'on désigne par le nom de *réduction au centre*, et qui est analogue à celle dont on vient de parler.

Il arrive en outre, presque toujours, que l'angle observé est incliné à l'égard du plan horizontal qu'on imagine passer par le centre de l'instrument : la projection de cet angle, sur ce plan, se nomme *réduction à l'horizon.*

Enfin, si l'objet sur lequel on pointe est éclairé par le Soleil, l'observateur n'en voit ordinairement qu'une partie ou *phase*, et le rayon visuel, dirigé sur le milieu apparent de cette phase, ne passe pas par le centre de l'objet. Il faut donc encore à l'angle observé, faire une correction qui dépend essentiellement de la position du Soleil et de la forme de l'objet; mais il est très rare que cette correction soit sensible, parce que l'on fait en sorte de pouvoir pointer sur des objets très distincts, et cependant d'une très petite largeur apparente.

Lorsque les angles des triangles d'une grande chaîne sont réduits à l'horizon de leurs sommets respectifs, on ajoute ceux d'un même triangle, et la somme que l'on obtient surpasse nécessairement deux angles droits; parce que les angles ajoutés sont ceux d'un triangle sphérique dont les côtés très peu courbes, à la vérité, représentent les distances curvilignes comprises entre les verticales des stations.

Ensuite l'excès dont il s'agit, et qui est en même tems affecté de l'erreur de l'observation, se répartit indistinctement par tiers sur les trois angles du triangle dont il dépend. Quand ces angles sont ainsi réduits à ne valoir que deux angles droits, on procède au calcul des distances, en les considérant simplement comme des côtés de triangles rectilignes, en vertu du théorème de l'art. 100, quoiqu'elles soient des arcs de grand cercle de la sphère dont le rayon est le même que celui de la *ligne géodésique*, ou de la base réduite préalablement à un niveau constant, qui est celui de la mer. Quant aux triangles secondaires, ils se forment, s'observent et se résolvent de la même manière que les grands triangles qui leur fournissent pour bases un ou plusieurs de leurs côtés.

Au lieu de ramener par cette voie la résolution des triangles sphériques peu courbes à celle des triangles rectilignes, on peut réduire les angles horizontaux aux angles formés respectivement par les cordes des arcs compris entre les stations; et pour lors les triangles à calculer sont réellement des triangles rectilignes, dont un des côtés est la base mesurée et réduite à sa corde, ainsi qu'à un horizon fixe tel que celui de la mer.

On ne peut néanmoins, à l'aide des seules distances calculées, assigner la place que les stations occupent réellement sur le globe terrestre; il faut en outre déterminer la latitude et la longitude de l'une d'elles, ainsi que l'*azimut* d'un des côtés de la chaîne, c'est-à-dire l'angle qu'il forme avec le méridien connu. On déduit alors de ces nouvelles données les *positions géographiques* des objets terrestres, ou leurs distances à l'équateur et au méridien d'où l'on est convenu de compter les longitudes. Il est sur-tout essentiel dans les triangulations de premier ordre, faites dans le but de déterminer les dimensions de la Terre, ou de former une exacte description géométrique d'un grand état, de mesurer plusieurs bases de vérification, et de s'assurer si les résultats fournis par les calculs s'accordent avec les latitudes et les azimuts observés vers les extrémités de la chaîne des triangles.

Pour connaître en outre le relief du terrain, il est nécessaire de déterminer la hauteur de ses différens points au-dessus des mers : or c'est ce que procurent les nivellemens trigonométriques, qui font essentiellement partie des opérations géodésiques des différens ordres. La latitude, la longitude et la hauteur absolue de chacun

des sommets des triangles d'un réseau sont donc trois coördonnées indispensables.

Lorsqu'on a recueilli ainsi tous les élémens qui constituent le canevas d'une carte, on y trace, suivant une certaine loi, deux systèmes de lignes, dont l'un représente des méridiens, l'autre des parallèles; et l'on fixe, à l'aide de ces lignes, les positions de tous les lieux donnés par leur latitude et leur longitude. Quelquefois aussi, quand la carte n'embrasse qu'une petite étendue de pays, on en rapporte les principaux lieux à deux axes rectangles, qui sont le développement rectiligne du méridien principal de cette carte, et celui d'un arc de grand cercle perpendiculaire à ce méridien. Dans ce cas, les coordonnées des points déterminés par le réseau de triangles, sont des distances à la méridienne et à sa perpendiculaire, ou des plus courtes distances géographiques.

Tel est le précis des matières que nous allons traiter avec tout le détail nécessaire; nous tâcherons même que les personnes qui ne sont pas versées dans l'Analyse et la Géométrie, retirent tout le fruit possible de la lecture de cet Ouvrage.

CHAPITRE II.

De la meilleure condition des triangles, du choix et de la construction des signaux.

109. Nous avons déjà dit que les triangles d'un réseau du premier ordre doivent être les plus grands possible; mais la courbure de la Terre et la force des lunettes du cercle répétiteur fixent à cet égard une limite que l'on ne saurait franchir sans s'exposer à nuire à la précision qui résulte de l'emploi d'un bon instrument, quand les objets qu'on observe sont bien distincts. Nous avons dit aussi que les triangles réunissent les conditions les meilleures, quand ils sont équilatéraux ou peu différens de cette forme; c'est ce que va prouver le calcul suivant.

Soient, comme de coutume, A, B, C les angles, et a, b, c les côtés d'un triangle géodésique; on aura

$$a \sin B = b \sin A;$$

et si l'on suppose que la base b ait été mesurée avec un soin tout particulier, l'erreur sur cette mesure pourra être considérée comme nulle. La différentielle de cette équation, en y regardant b comme constant, sera donc simplement

$$da = \frac{b \cos A}{\sin B} dA - \frac{a \cos B}{\sin B} dB;$$

et à cause de $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$, on aura

$$da = a \cot A dA - a \cot B dB.$$

Dans cette formule différentielle, les variations dA, dB sont supposées positives : elles peuvent en général désigner les erreurs commises sur la mesure des angles A, B; erreurs qui se composent de celles de l'instrument et de celles du pointé. Si on admet qu'elles

soient égales, et dans le même sens, on aura, pour l'erreur du côté cherché a,

$$da = ad\mathcal{A}\,(\cot \mathcal{A} - \cot B),$$

laquelle sera évidemment nulle si $\mathcal{A} = B$.

Si au contraire on suppose que les erreurs $d\mathcal{A}$, dB soient égales, mais de signes différens, on aura

$$da = \pm\, ad\mathcal{A}\,(\cot \mathcal{A} + \cot B);$$

et puisque d'après l'art. 45

$$\cot \mathcal{A} + \cot B = \frac{\sin(\mathcal{A}+B)}{\sin \mathcal{A} \sin B} = \frac{\sin(\mathcal{A}+B)}{\frac{1}{2}\cos(\mathcal{A}-B) - \frac{1}{2}\cos(\mathcal{A}+B)},$$

il s'ensuit que

$$da = \pm\, ad\mathcal{A} \cdot \frac{2\sin C}{\cos(\mathcal{A}-B) + \cos C};$$

l'erreur da sera donc la plus petite possible, lorsqu'on aura $\cos(\mathcal{A} - B) = 1$, ou $\mathcal{A} = B$.

Il résulte de ces deux hypothèses, que *la condition la plus avantageuse est en effet que les deux côtés cherchés d'un triangle soient chacun égaux à la base mesurée.*

Dans la pratique, il est impossible de satisfaire rigoureusement à cette règle; mais en formant des triangles dont les côtés diffèrent peu entre eux, les erreurs des observations angulaires auront très peu d'influence sur les côtés calculés. En général, il ne faut admettre aucun angle au-dessous du tiers d'un angle droit, à moins que les localités ne forcent à s'écarter de ce précepte. D'ailleurs l'on se procure par là un autre avantage; c'est qu'un angle de cette grandeur s'observe avec le cercle de Borda plus facilement que s'il était plus petit.

La formule fondamentale $a = \frac{b \sin \mathcal{A}}{\sin B}$ étant différenciée par rapport à a et b, on a

$$da = db\left(\frac{\sin \mathcal{A}}{\sin B}\right);$$

ainsi, l'erreur qui affecte le côté cherché est égale à celle de la base, multipliée par le rapport $\frac{\sin \mathcal{A}}{\sin B}$, ou par une quantité plus grande que

l'unité. En effet, en supposant $B = \frac{1^{\circ}}{3}$ on a $A + C = \frac{5^{\circ}}{3}$, et par conséquent $\frac{5^{\circ}}{6}$ pour la valeur moyenne de A ou de C.

Les bases doivent donc être mesurées avec l'attention la plus scrupuleuse, et n'être pas trop courtes par rapport aux autres côtés des triangles dont elles dépendent.

En formant un long réseau, on conditionne les triangles dont il se compose, de manière à ce qu'ils s'agrandissent peu à peu, à partir de la base mesurée, et qu'ils acquièrent les dimensions que comportent les localités et les instrumens.

110. L'expérience démontre que les erreurs dans la mesure des angles, loin de s'accumuler de plus en plus sur les côtés des triangles par lesquels on passe pour arriver à la dernière ligne d'une longue chaîne, se compensent au contraire en partie, lorsque ces triangles remplissent les conditions qui viennent d'être énoncées. Par exemple, avant l'invention des instrumens et des méthodes de calcul maintenant en usage en Géodésie, Bouguer et les autres académiciens français qui furent chargés de la mesure des trois premiers degrés au Pérou, trouvèrent seulement 65 centimètres (2 pieds) d'erreur entre la mesure et le calcul, sur la dernière base déduite d'une série de vingt-huit triangles étendus sur un arc de plus de 350000 mètres; et de nos jours, MM. Delambre et Méchain n'ont pas trouvé une différence d'un tiers de mètre dans la longueur de la base de Perpignan, conclue de celle de Melun, par une chaîne de plus de 60 triangles, quoique la distance qui sépare ces deux bases surpasse 900000 mètres (*Astronomie* de M. Delambre, t. III, p. 545). Néanmoins, M. Laplace, dans un savant Mémoire sur le Calcul des Probabilités appliqué aux opérations géodésiques (*Connaissance des Tems* de 1820, p. 422), trouve en général de l'avantage à ce qu'un réseau soit composé du plus petit nombre possible de triangles.

111. Le choix des stations, c'est-à-dire des points où l'on doit observer, exige beaucoup de discernement de la part de l'ingénieur, pour allier l'économie avec la précision à laquelle on désire atteindre. Il est nécessaire qu'il fasse d'abord la reconnaissance du pays, et trace le plan de son canevas trigonométrique. S'il a pour but de mesurer un arc de méridien, ou toute autre ligne fondamentale d'une

grande opération geodésique, il faut qu'il dispose ses triangles de manière qu'ils soient, autant que possible, traversés par cette ligne; or c'est de quoi il s'assurera en faisant des observations et des calculs provisoires, comme nous l'enseignerons par la suite. Mais s'il entreprend le levé de la carte d'une contrée, il n'est plus gêné dans sa route; il a la liberté d'étendre son réseau dans tous les sens. En général, il doit choisir de préférence les endroits assez élevés pour qu'ils se projettent dans le ciel, lorsqu'ils sont aperçus des stations voisines.

Supposons que du point A (fig. 16), on voie le point B dans le ciel. Pour savoir si de ce second point l'objet A se projettera de même dans le ciel, on prendra la distance zénitale ZAB et la distance zénitale ZAC du point opposé de l'horizon. Or, il peut arriver que la somme $ZAB + ZAC$ surpasse sensiblement deux angles droits; dans ce cas, l'objet A sera bien visible du point B. Mais si la somme dont il s'agit est plus petite que 200^g, l'objet A se projettera en terre ou sur la montagne qui borde l'horizon vu du point B, et sera souvent difficile à distinguer nettement, à moins que l'intervalle qui le sépare des limites de l'horizon ne soit considérable.

Lorsque la somme des deux distances zénitales sera de deux angles droits, ou quelques minutes de plus, il y aura lieu d'espérer que le signal A, vu de la station B, sera suffisamment élevé par la réfraction, pour être aperçu dans le ciel.

112. Les clochers, les tours et les donjons couronnés de plateformes sont en général des stations commodes; mais il n'est pas toujours possible d'en disposer pour former des triangles avec les conditions les plus avantageuses, et le plus souvent ces objets ne dispensent pas de l'usage des signaux, quand on veut rendre le pointé plus sûr. Il est vrai que, dans ce cas, ces signaux sont très simples, et s'établissent à peu de frais. Par exemple, une poutre verticale, surmontée d'un poinçon ou tonneau, ou d'un petit cône, étant établie sur le haut d'un édifice dont la forme et la grosseur nuiraient à l'exactitude des observations angulaires, offre un point de mire avantageux. Quelquefois aussi l'on préfère un disque d'un demi-mètre de rayon, peint en noir, et percé au centre pour apercevoir le ciel à travers. Mais ce moyen n'est praticable que quand on peut charger quelqu'un de diriger le disque en face de l'observateur.

Dans les opérations délicates exécutées en Angleterre, vers la fin

du siècle dernier, et dans l'Inde au commencement de celui-ci, l'on a préféré les observations de nuit, et l'emploi des feux du Bengale, parce qu'ils jettent une lumière très vive. Nos cercles français, construits d'après le principe de la répétition, se refusent à l'usage de ces feux de courte durée; mais on y supplée par des lampes à courant d'air, accompagnées de miroirs paraboliques qui réfléchissent la lumière dans la direction de l'observateur. Ces signaux paraissent être les meilleurs qu'on puisse se procurer; MM. Biot et Arago s'en sont servis en Espagne, avec beaucoup de succès, dans la prolongation de la méridienne de France; et M. Laplace vient d'en recommander expressément l'usage pour la mesure de la grande perpendiculaire dirigée de Strasbourg à Brest, l'une des lignes fondamentales du canevas trigonométrique de la nouvelle carte du Royaume.

On augmente le foyer de lumière, en réunissant plusieurs réverbères; mais il faut en confier la garde à une personne qui prenne le soin d'entretenir les lampes, afin que le centre de figure soit toujours le même. Il paraît que trois réverbères de moyennes dimensions, qui seraient disposés aux angles d'un petit triangle équilatéral, offriraient une masse de lumière suffisante pour une distance de dix à douze myriamètres. En les adaptant à un pivot qui représenterait l'axe du signal, on aurait la faculté de les tourner au gré de l'observateur. Les avantages qu'on trouve dans leur emploi consistent en ce que l'on n'a aucune phase à craindre; que le point de mire est toujours très distinct; et qu'à moins d'oscillations produites par une atmosphère agitée, ou de fortes brumes, les observations sont généralement plus concordantes que celles qui sont faites de jour, et pendant la présence du Soleil.

Quand on ne peut profiter des édifices comme points de station, l'on emploie des signaux qu'on établit sur des lieux élevés. On les forme avec de longues files de bois réunies en pyramide tronquée à base quadrangulaire, et on leur donne de la solidité en les enfonçant en terre, ou en les maçonnant aux quatre angles de la base; enfin, pour les rendre plus visibles, on garnit de planches les quatre faces jusqu'à environ deux mètres de terre : cet intervalle, laissé libre, est nécessaire pour voir les signaux environnans. Alors on se place précisément dans l'axe du signal, afin d'éviter la réduction au centre (*v.* la fig. 17): cet axe est déterminé par la verticale passant par le point de mire. On a soin, en faisant le plan du signal, d'indiquer le point où cette verticale rencontre la base.

Les ingénieurs géographes sont dans l'usage de planter une borne au centre d'un signal érigé en rase campagne. Cette précaution, que ne prennent pas toujours les observateurs, procure des points de repère très utiles, tant pour ceux qui doivent lier leurs opérations de détail aux points trigonométriques, que pour ceux qui voudraient coordonner des nivellemens partiels du terrain avec le nivellement général résultant de la triangulation.

Des arbres bien droits, et dépouillés de branches vers le bas de leurs tiges, sont aussi de bons signaux naturels; lorsqu'ils se trouvent isolés et sur les sommets des montagnes, ils s'aperçoivent de très loin, sur-tout s'ils se projettent dans le ciel ou sur les nuages.

On fait aussi construire en pierre des pyramides quarrées, et on les dispose de manière que les faces soient à peu près perpendiculaires aux côtés des triangles qui ont ces pyramides pour sommets. Si ces signaux se projetaient en terre, ou sur un fond qui les dérobât à la vue, on les ferait peindre, afin qu'ils pussent se bien détacher par l'effet de l'opposition des couleurs. Lorsqu'un signal se projette dans le ciel, il convient de le peindre en noir; s'il est vu sur un fond vert, la couleur blanche le fera bien distinguer.

M. Delambre prescrit de donner à un signal une hauteur telle, que de la station la plus éloignée il paraisse sous l'angle de 31″ de la division sexagésimale; dans ce cas cette hauteur est

$$H = 0{,}00015\,K,$$

K étant la distance à ce signal. Il prescrit en outre de donner au côté de la base le tiers de la hauteur.

Parmi les signaux d'une forme insolite, nous citerons particulièrement les flèches très aigues, parce qu'elles sont souvent invisibles. Les moulins à vent, à cause de l'irrégularité de leur figure, sont aussi de fort mauvais signaux; d'ailleurs comme ces objets mobiles tournent sur un axe qui ne passe pas par le centre de figure, ils se présentent sous différens aspects, selon la direction dans laquelle on place les ailes pour donner prise au vent. Il résulterait donc de leur emploi des erreurs d'observation qu'il serait impossible d'évaluer.

Si l'on est obligé d'adopter pour signal une flèche élevée, il faut tâcher de se placer le plus près possible du point où l'on doit viser des stations voisines, afin que le défaut de verticalité de la flèche ne donne lieu à aucune erreur sensible dans la réduction à l'axe.

CHAPITRE III.

Description et usages du Cercle répétiteur.

113. Si on partage la circonférence d'un cercle en plusieurs parties égales, et qu'à partir de zéro l'on porte successivement sur cette circonférence, et suivant l'ordre des divisions, la longueur d'un arc, jusqu'à ce que sa seconde extrémité tombe exactement sur une des lignes de division, ou du moins en soit si près que la différence échappe aux sens; on obtiendra rigoureusement, ou d'une manière très approchée, le nombre des parties contenues dans l'arc proposé, en divisant le nombre des parties de l'espace parcouru, par le nombre de fois que l'arc aura été porté sur la circonférence. Supposons, par exemple, que cette circonférence soit divisée en 4000 parties, et qu'à la neuvième fois, après une révolution entière, l'arc dont on cherche la mesure tombe sur la ligne qui termine la 50e division; il est clair que l'espace parcouru contiendra 4050 parties, et que l'arc proposé aura pour mesure $\frac{4050}{9} = 450$. Cet arc sera donc à la circonférence entière dans le rapport de 9 : 80. S'il existe une erreur dans cette évaluation, il est évident qu'elle ne doit être que la neuvième partie de celle dont peut être affectée la neuvième division; mais rien n'empêche de rendre cette erreur beaucoup plus petite et même de l'atténuer, en portant l'arc à mesurer un plus grand nombre de fois sur la circonférence.

Ce moyen fort ingénieux de trouver, par des opérations répétées, le rapport d'un arc à la circonférence dont il fait partie, est dû à l'astronome Mayer; mais Borda en fit une application très utile dans la mesure des angles, en imaginant pour cet effet le cercle répétiteur dont nous avons déjà parlé, et qui réunit le précieux avantage d'éluder presqu'entièrement les erreurs de la division, lorsqu'on multiplie suffisamment les observations.

Un cercle de 43 centimètres (16 pouces) de diamètre suffit pour les opérations les plus délicates de la Géodésie, et son *limbe* com-

prend aisément 4000 parties égales, dont 10 forment le *grade* ou le degré décimal. Dans un cercle de cette dimension, et même dans les cercles plus petits, la lunette supérieure *AB* (planche III) est adaptée à un châssis formé de deux règles ou *alidades* rectangulaires. On évalue les fractions des plus petites parties du limbe au moyen des divisions tracées aux extrémités des règles du châssis; l'ensemble de ces divisions compose ce que l'on nomme le *vernier* ou le *nonius*.

Pour concevoir l'usage du vernier, supposons que le limbe comprenne 4000 parties, et par conséquent 400 grades; et que 9 de ces parties embrassent les 10 parties du vernier : alors quand la première ligne du vernier, qu'on nomme *index* ou *ligne de foi*, sera exactement sur une ligne de division du limbe, sur le 40e grade par exemple, la seconde ligne du vernier sera en arrière de sa correspondante sur le limbe, d'un dixième de décigrade ou d'une minute centésimale. Si donc on faisait avancer la lunette supérieure suivant l'ordre de la graduation, et de manière que toutes les lignes du vernier coïncidassent les unes après les autres avec celles du limbe, on lirait successivement

$$40^g,0, \qquad 40^g,01, \qquad 40^g,02, \ldots\ldots 40^g,1;$$

puisque l'index, partant du 40e grade, aurait parcouru $\frac{1}{10}$, ensuite $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$.... $\frac{10}{10}$ d'un décigrade, ou de la plus petite partie du limbe. Le vernier donne donc dans ce cas les centièmes du grade ou les minutes. On peut même avoir par *estime* des millièmes ou des dixaines de secondes. En général, si le vernier contient n parties, il donnera $\frac{1}{n^{ième}}$ de la plus petite partie du limbe; et par conséquent une partie du vernier sera à celle du limbe dans le rapport de $n-1 : n$. Ordinairement les dix parties principales du vernier sont chacune divisées en deux également, pour rendre l'estime plus sûre.

Il suit de là que si un cercle était d'une petitesse telle que le grade ne pût être partagé qu'en 5 parties égales, chacune d'elles représenterait un arc de 20 minutes centésimales, ou 20 centigrades; ainsi, le vernier composé de 10 parties donnerait les minutes de 2 en 2.

Afin de pouvoir lire aisément le vernier, on se sert d'un microscope ou d'une loupe qui grossit les objets; et même pour rendre les traits plus distincts, on est quelquefois obligé d'éclairer la partie du cercle où l'on doit lire, par un reflet de lumière provenant d'un

morceau de papier que l'on expose au-dessus du limbe, dans une situation convenable. Cela est sur-tout indispensable lorsque les divisions sont tracées sur l'argent, parce que l'on obtient de cette manière un blanc mat qui ne fatigue point la vue. Dans les cercles français, chaque microscope est ordinairement adapté au châssis des verniers; mais il est beaucoup plus commode d'en placer deux aux extrémités d'une branche mobile, assujétie à tourner autour du centre du limbe.

L'agrafe qui accompagne chaque lunette sert à la rendre fixe sur le limbe de l'instrument. Pour cet effet, l'on fait tourner dans le sens convenable les vis de pression p, p' (planche VI). Quand on commence à éprouver de la résistance, on est sûr que la lunette ne peut plus se mouvoir indépendamment du limbe.

A chaque agrafe est adaptée une vis de rappel R, R', au moyen de laquelle on fait avancer ou reculer lentement la lunette.

Chaque lunette porte à ses extrémités deux verres convexes d'inégales dimensions. Celui qui a le plus grand diamètre se nomme l'*objectif;* c'est le verre qui est traversé le premier par les rayons lumineux venant de l'objet. L'autre verre ou lentille, se nomme l'*oculaire,* parce que c'est à travers cette lentille que l'on regarde directement.

L'objectif est formé de deux verres de différente espèce; le premier, de verre ordinaire ou de *crown-glass,* est convexe, et placé tout-à-fait au bout de la lunette; le second, de cristal ou de *flint-glass,* est concave et placé du côté de l'oculaire, de manière à emboîter exactement la convexité du premier. Les lunettes qui ont un pareil objectif sont dites *achromatiques,* parce qu'elles ne produisent aucun iris autour de l'image de l'objet, et que la vision est alors très nette, sur-tout vers le centre de l'objectif.

On a imaginé en Bavière, il y a peu de tems, un procédé pour faire le flint-glass, et il paraît qu'on l'obtient de très bonne qualité, c'est-à-dire très dense et sans stries. On en fait aussi d'excellent en France.

On appelle *champ* de la lunette, tout l'espace circulaire que l'œil y découvre : il est utile qu'il soit le plus grand possible. Les meilleures lunettes sont celles qui offrent un fort grossissement.

Dans les lunettes à deux verres convexes seulement, les objets sont vus renversés, et plus clairement que dans celles où il sont vus droits, à l'aide d'un plus grand nombre de lentilles. On n'en adapte

pas d'autres aux instrumens de Géodésie et d'Astronomie. Ce renversement de l'image n'a aucun inconvénient, parce que l'on est bientôt accoutumé à discerner les objets dans cette situation.

L'objectif de ces lunettes est ordinairement adapté à une pièce cylindrique mobile, enveloppant l'extrémité du canon. Nous indiquerons tout à l'heure l'usage de cette pièce.

Le lieu intérieur de la lunette où viennent se peindre avec beaucoup de netteté les objets extérieurs, se nomme le *foyer* de l'objectif : on tire ou bien l'on enfonce le petit tube qui porte l'oculaire, jusqu'à ce que cette circonstance ait lieu. La distance de l'oculaire à l'objectif varie selon la vue de l'observateur.

Le *réticule*, placé près de l'oculaire et au foyer de la lunette, est un diaphragme ou petit anneau de métal dont les diamètres rectangulaires, un peu plus petits que ceux de la lunette, sont représentés par deux fils de soie, d'araignée, ou d'argent. Cet instrument a la propriété de se mouvoir perpendiculairement à l'axe de la lunette, et de s'incliner d'un demi-quadrant. S'il arrivait que ces fils donnassent lieu à une *parallaxe*, c'est-à-dire que leur image parût éprouver du dérangement à l'égard de l'objet que l'on fixe, lorsque l'on regarde par différens points de l'ouverture de l'oculaire; alors on ferait mouvoir en avant ou en arrière, et parallèlement à elle-même la pièce qui entraîne l'objectif, de manière à en ramener le foyer à l'endroit même des fils supposés fixes. Au contraire, quand ces fils sont mobiles dans le sens de la longueur de la lunette, on les rapproche ou on les éloigne de l'objectif jusqu'à ce qu'il n'existe plus de parallaxe.

Les extrémités du cylindre X (pl. III et VI) traversent les bouts des supports Z, Z'. Ce cylindre en tournant, incline l'axe Y placé perpendiculairement au centre du cercle auquel il sert de pivot. Pour incliner le cercle à volonté, et le conserver dans la position que l'on juge convenable de lui donner, on desserre d'abord la vis P du quart de cercle attaché au cylindre X; ensuite on la serre quand on a obtenu l'inclinaison désirée. Il est utile qu'il y ait aussi une vis de rappel à ce quart de cercle, pour lui procurer un mouvement lent analogue à celui qu'on peut donner aux lunettes.

Dans les cercles de Borda, l'axe Y traverse une espèce de boîte TT' qui porte le nom de *tambour*, et dans laquelle est enchâssé un plomb servant de contre-poids au cercle, pour le tenir en équilibre dans le

cas où l'on oublierait de faire agir la pince *P* pour fixer le quart de cercle *C* au support *Z*.

Le périmètre du tambour est dentelé, de manière qu'à l'aide de la vis sans fin *W* (pl. V) qui engrène dans cette dentelure, on fait tourner lentement le cercle et les lunettes, sans que la colonne *S* participe à ce mouvement. Cette vis sans fin, que l'on nomme aussi *vis tangente*, se détache du tambour au moyen d'un pivot tournant *D*, auquel est fixée une petite pièce d'acier faisant l'office d'un levier.

Les supports *Z*, *Z'* sont unis par une traverse, et forment ce que l'on nomme la *fourchette*. Cette traverse se fixe à la colonne de l'instrument, en la plaçant sur le talon qui termine cette colonne, et en l'arrêtant par le moyen des vis *H*, *H'*. On voit donc que l'instrument est composé de deux parties qui peuvent être réunies ou séparées à volonté : on les sépare pour les emboîter et les transporter plus commodément.

Le pied de la colonne est placé au milieu d'un cercle denté *z z'*, que l'on nomme *cercle azimutal*. Ce cercle est établi à demeure sur le pied de l'instrument, composé de trois branches *V*, *V'*, *V''*. Le bas de la colonne entraîne par son mouvement de rotation une alidade *zz'* (pl. VII, n° 2), à l'une des extrémités de laquelle est un vernier qui sert pour estimer les parties des divisions du cercle azimutal. La pince *K* est destinée à arrêter ce mouvement, tandis que la vis d'engrenage, ou le pignon *O*, sert à le procurer. Quelquefois le cercle azimutal tourne avec la colonne, et pour lors le vernier est fixe.

Il résulte de ce qui précède, 1°. que les deux lunettes peuvent être rendues fixes ou mobiles indépendamment l'une de l'autre; 2°. que la colonne étant immobile, le limbe peut tourner rapidement ou lentement autour de l'axe *Y*, si l'on désengrène ou si l'on fait agir la vis du tambour; 3°. que tout l'instrument peut tourner de la même manière sur sa colonne; 4°. enfin que le limbe s'incline dans deux positions différentes, au moyen du quart de cercle et des vis du pied.

Il nous reste à parler du grand et du petit niveau.

Le premier *df* (pl. V), adapté invariablement à la lunette inférieure *A'B'*, est composé d'un étui en cuivre recouvrant en partie un tube de verre fermé hermétiquement, et contenant de l'alcool ou de l'éther, et une petite quantité d'air ou de vapeur de la liqueur, qui prend vers le milieu du tube une forme plus ou moins oblongue, suivant la température de l'atmosphère. La justesse de cet instrument dépend sur-tout de sa *sensibilité;* on entend par là la grande facilité avec

laquelle la bulle d'air quitte le milieu du tube pour se rendre à son extrémité la plus haute, lorsqu'on donne la plus petite inclinaison à ce tube. Cette sensibilité se manifeste d'autant plus que la bulle est plus longue et que le tube est d'un plus grand diamètre. Il faut cependant que cette sensibilité ait des bornes, car si la paroi intérieure du tube était cylindrique, la bulle d'air, hors le cas d'équilibre, se précipiterait toujours à l'extrémité supérieure de la colonne fluide, et il serait d'ailleurs extrêmement difficile de la rendre stationnaire au milieu du tube. Feu M. de Chezy, ingénieur des ponts et chaussées, reconnut le premier que pour remédier à cet inconvénient, et faire en sorte que l'écart de la bulle d'air fût proportionnel aux degrés d'inclinaison de l'axe du niveau, il fallait donner à l'intérieur du tube, dans le sens de sa section longitudinale, la forme d'un arc de cercle d'une très légère courbure.

On juge que le niveau est *calé*, c'est-à-dire que la bulle d'air est stationnaire au milieu du tube, lorsque les extrémités de cette bulle répondent aux mêmes numéros qui désignent les divisions tracées symétriquement sur le tube, ou sur une petite règle d'ivoire ou de métal placée au-dessus du niveau. Les plus petites parties de cette règle sont ordinairement des millimètres, et le point zéro est au milieu du tube. Il n'y a que l'expérience qui puisse faire connaître combien de parties doit parcourir la bulle en partant du milieu du tube, pour que l'inclinaison de l'axe du niveau soit de 1″. On verra par la suite comment l'on fait cette expérience. M. Fortin, l'un de nos plus habiles artistes, construit des niveaux à tubes rodés, qui ont une grande sensibilité.

Le petit niveau *gk* (pl. VI) est construit d'après le même principe que le précédent, et il est placé sur l'axe *Y* du cercle; l'une de ses extrémités est fixée à une charnière, mais l'autre extrémité peut être soulevée par le moyen d'une vis. Ce jeu est nécessaire pour caler ce niveau, lorsque le limbe du cercle a été disposé verticalement à l'aide d'un fil-à-plomb suspendu à une pince qu'on adapte à la circonférence du limbe. Pour que cette verticalité ait lieu, il faut que le fil-à-plomb batte librement sur la ligne tracée autour de la petite tige de la seconde pince accrochée au point le plus bas de la circonférence dont il s'agit. Lorsque l'artiste a eu le soin de tourner le cercle sur son axe même, il est plus exact, pour mettre le plan de ce cercle dans une situation verticale, de disposer l'axe horizontalement au moyen d'un niveau à bulle d'air que l'on y suspend.

114. Le cercle de Borda, tel que nous venons de le décrire, est extrêmement précieux en Géodésie et en Astronomie, à cause de l'exactitude des résultats auxquels il conduit lorsqu'on sait en faire un bon usage. Néanmoins, il n'est pas exempt de quelques imperfections, et l'une des plus grandes, selon nous, est dans l'effet de la vis tangente; car si en la faisant engrener, il arrive qu'un de ses filets tombe précisément sur un de ceux du tambour, le cercle éprouve un ébranlement subit et violent aussitôt qu'il reçoit un petit mouvement de rotation par le moyen de cette vis, en sorte que les lunettes sont transportées tout à coup bien au-delà des points auxquels on vise; mais on corrige ce défaut en substituant une pince à la vis tangente, comme le fait maintenant M. Bellet. Un autre inconvénient, c'est que la colonne est si longue, que le cercle oscille par un vent faible, ou par le moindre choc; mais il est des artistes qui remplacent cette colonne par un axe en fer, soutenu par trois branches de cuivre faisant les fonctions d'arcs-boutans : alors le cercle a dans toutes ses positions une grande solidité. Tels sont les cercles astronomiques de MM. Lenoir et Fortin.

M. Reichenbach, artiste très distingué de Munich, construit, depuis plusieurs années, des cercles répétiteurs qui ont aussi acquis une grande réputation. Ils sont principalement remarquables par l'exactitude de la division, la bonté des vis de rappel, et en ce que la lunette supérieure est adaptée à un cercle mobile tournant avec la plus grande liberté dans un autre cercle gradué. Le grand cercle astronomique que cet artiste a construit pour M. Laplace, et qui est établi à l'Observatoire royal, est un chef-d'œuvre d'exécution. M. Fortin en construit un autre, d'après les principes de M. Troughton : on a tout lieu d'espérer que ce nouveau cercle mural rendra de grands services en Astronomie.

De la mesure des angles entre deux objets.

115. Avant de procéder à la mesure d'un angle, il est essentiel de s'assurer si les axes optiques des lunettes, c'est-à-dire si les droites menées par le centre de réfraction de chaque objectif et l'intersection des fils des réticules, sont exactement parallèles au plan du limbe : pour cela, on se sert d'une *lunette d'épreuve*. Cette lunette *ep* (pl. IV), qui n'a qu'un fil, traverse deux plaques quarrées qq' parfaitement égales. Lorqu'elle est placée sur le limbe disposé horizontalement, on voit à quelle ligne distincte d'un objet très éloigné son fil horizontal

répond; et si, en la renversant sur les faces *qq* opposées à celles *q'q'* ce fil passe par la même ligne apparente, on est sûr alors que l'axe optique est exactement parallèle au limbe. Si au contraire cette épreuve fait connaître que l'axe optique passe par une autre ligne, il sera nécessaire dans ce cas d'élever ou d'abaisser le réticule de la lunette de la moitié de la distance des deux lignes observées; ce qui se fait au moyen d'un tourne-vis qu'on implante dans la tête de la vis de rappel de ce réticule. Cette vérification étant faite, et la lunette d'épreuve restant dans la même situation, l'on dirige sur sa ligne de repère, les deux lunettes de l'instrument; et si les fils horizontaux de leurs réticules, ou bien si les intersections des fils inclinés d'un demi-quadrant n'y répondent pas, on les y amène au moyen des vis de rappel *r* des réticules; après quoi les axes optiques des trois lunettes se trouvent parallèles au limbe.

On peut se passer de lunette d'épreuve par le procédé suivant. Après avoir rendu vertical le plan du limbe et mis le cercle azimutal dans une position horizontale, à l'aide d'un petit niveau *nn'*, on amène la lunette supérieure sur un objet éloigné, ensuite on fait faire exactement une demi-révolution à l'instrument, puis l'on ramène la lunette sur l'objet; alors si l'intersection des fils du réticule s'est écartée du premier point de mire dans le sens horizontal, cela vient évidemment de ce que l'axe optique n'est pas parallèle au plan du limbe; dans ce cas l'on amène l'intersection des fils au milieu de l'intervalle, à l'aide de leur vis de rappel. Pour vérification l'on recommence cette opération plusieurs fois, et quand on est sûr que le parallélisme existe, il ne reste plus, pour l'établir relativement à la lunette inférieure, qu'à faire coïncider son axe optique avec celui de la lunette supérieure. Ce procédé, dont il est facile de se rendre raison, serait exact sans les imperfections peut-être inévitables de l'instrument; aussi vaut-il mieux, pour plus de sûreté, recourir à la lunette d'épreuve.

Lorsqu'on doit observer une flèche, on trouve quelquefois qu'il est plus commode et plus exact de l'amener à l'intersection des fils inclinés, ainsi qu'il vient d'être dit. Mais il est à propos de remarquer que de quelque manière qu'on dispose ces fils pour l'observation, il faut préalablement les vérifier dans la situation qu'on aura adoptée, parce que, comme ils ont dans chaque lunette un mouvement commun, il arrive souvent que par un petit défaut de construction leurs intersections ne répondent par précisément au même point, dans les

deux positions que l'on peut donner aux réticules; et c'est ce qui ferait que les angles seraient souvent observés dans un plan autre que celui sur lequel on compte les grades ou les degrés. Enfin, il est important de rendre l'objectif fixe à l'égard du tube de la lunette; car, comme le centre de figure et celui de réfraction ne coïncident pas toujours, l'axe optique se dérangerait dans le cours d'une observation, si l'objectif venait à tourner sur lui-même.

Maintenant, pour mesurer un angle entre deux objets terrestres, il faut d'abord amener les axes optiques des lunettes dans le plan de cet angle, et les y conserver pendant tout le cours de l'observation. Pour cet effet, l'on commence par disposer le limbe du cercle de manière que son plan passe à très peu près par les deux points de mire; or, c'est à quoi l'on parvient en bornoyant à la vue simple, et inclinant seulement le limbe, en faisant tourner un peu, s'il est nécessaire, tout l'instrument sur la colonne, jusqu'à ce que les objets paraissent à égales distances du limbe. Ensuite, l'un des observateurs (car il est bon d'être deux pour s'entr'aider et éviter beaucoup de lenteurs et tâtonnemens) rendant la colonne immobile, donne un mouvement de rotation au limbe, jusqu'à ce que la lunette supérieure fixée à zéro soit dans la direction de l'un des objets, de celui de droite, par exemple. Le second observateur de son côté, place la lunette inférieure, rendue libre, dans la direction de l'autre objet; et chacun choisissant une vis du pied de l'instrument, la plus voisine du vertical de son oculaire, la fait mouvoir pour amener l'image de l'objet dans le champ de sa lunette, et ensuite à l'intersection des fils.

Ce procédé est évidemment fondé sur ce principe qu'un plan est donné de position lorsqu'il passe par deux droites qui se coupent, ou lorsque passant par un point, il est assujéti à être parallèle à ces mêmes droites. Ceux qui commencent à faire usage du cercle, ont quelquefois de la peine à se rendre ce procédé familier, quoiqu'il soit fort simple, et qu'il réussisse d'autant mieux qu'on a eu la précaution de disposer une des branches du pied dans la direction de la ligne qui divise à peu près en deux parties égales l'angle à mesurer. Cependant s'il arrivait que par une position particulière du cercle, les deux mouvemens imprimés en même tems aux deux lunettes avec les vis du pied se nuisissent continuellement, il faudrait déranger un peu la direction des pieds, afin de détruire cet effet et de parve-

nir au but qu'on se propose d'atteindre. M. Delambre a donné une formule pour éviter les tâtonnemens à cet égard; mais avec un peu de pratique, on est toujours dispensé d'en faire usage.

Supposons donc que les axes optiques soient dans le plan de l'angle à mesurer, et que les divisions du limbe, selon l'usage en France, soient numérotées de gauche à droite; on amènera, 1°. sur l'objet à droite la lunette supérieure toujours fixée sur zéro, en faisant tourner le limbe, après avoir isolé la vis tangente des filets de la vis du tambour, ou desserré la pince qu'on lui a substituée; ensuite, en faisant tourner cette vis lentement, lorsqu'elle aura été remise en action.

2°. On amènera la lunette inférieure sur l'objet à gauche, d'abord en desserrant son agrafe pour la rendre libre, puis en faisant jouer la vis de rappel de l'agrafe rendue fixe : alors quand les deux lunettes seront exactement dirigées sur les deux objets, on aura la première partie de l'observation.

3°. Sans déranger les lunettes, on desserrera la vis tangente, et l'on fera tourner le limbe en dirigeant la lunette inférieure sur l'objet à droite; et pour l'y fixer, l'on fera engrener la vis tangente. De cette manière, l'objectif de la lunette supérieure aura été repoussé dans le même sens d'une quantité égale à l'angle mesuré; et s'il arrive que le cercle ne soit plus dans le plan des objets, on l'y remettra à l'aide des vis du pied.

4°. On amènera enfin sur l'objet à gauche, la lunette supérieure rendue libre, et on l'y fixera en serrant son agrafe; par ce moyen, cette lunette aura décrit un arc égal au double de celui qui mesure l'angle proposé. On lira l'arc parcouru par la ligne de foi du vernier, et la moitié de cet arc sera la mesure de l'angle observé, abstraction faite toutefois de la petite erreur causée par l'excentricité des lunettes.

Cette mesure s'obtient donc à l'aide de deux *observations conjuguées*. Dans la première, la lunette supérieure est fixe à l'égard du limbe, tandis que l'inférieure est mobile. C'est tout le contraire dans la seconde observation.

En répétant l'opération précédente 1, 2, 3, 4.... fois, et partant toujours du point où la lunette supérieure est arrivée sur le limbe à la fin de la seconde observation conjuguée ou de l'observation paire, on aura évidemment le quadruple, le sextuple, l'octuple, etc., de

l'angle, pourvu qu'on ne néglige pas de tenir compte des circonférences entières parcourues.

116. Il existe un autre procédé pour mesurer un angle avec le cercle répétiteur; le voici. Au lieu de faire des observations *croisées*, comme ci-dessus, on fixe d'abord la lunette supérieure à zéro, et on la dirige sur l'objet à droite, ensuite on y amène la lunette inférieure, qui ne sert plus alors que de repère; et sans faire tourner le limbe, on pointe la lunette supérieure, rendue libre, sur l'objet à gauche, ensuite on la fixe. De cette manière, l'angle est mesuré exactement par l'arc que cette lunette a parcouru lorsqu'elle n'a point d'*excentricité*, c'est-à-dire quand le plan mené par l'axe *Y* du cercle (pl. III) contient en entier l'axe *ab* de cette même lunette. Si l'on veut continuer d'observer l'angle proposé, pour compenser les erreurs du pointé, et atténuer sur-tout celles des divisions du limbe, on fera tourner l'instrument en désengrenant la vis tangente, afin de ramener la lunette supérieure sur l'objet à droite, et on l'y fixera. On y ramènera la lunette inférieure pour la faire servir de repère, et ensuite on dirigera, comme la première fois, la lunette supérieure, rendue libre, sur l'objet à gauche. Alors la ligne de foi du vernier de cette lunette marquera le double de l'angle observé. On peut continuer d'opérer de la même manière pour avoir le triple, le quadruple, etc., de cet angle; mais ce procédé exige évidemment plus de tems que par les observations croisées, lorsqu'on veut atteindre le même degré de précision.

117. Dans les grands cercles, la lunette supérieure entraîne ordinairement 4 verniers disposés à angles droits, ou à peu près, afin de pouvoir lire sur quatre points différens de la circonférence du limbe, et obtenir par là une *moyenne* plus indépendante des erreurs de la division et de celles de la lecture. Supposons, par exemple, qu'on lise les quantités suivantes au commencement de l'opération :

	verniers 1er	2e	3e	4e
(*a*)	0,000,	100,025,	199,985,	300,015,

et qu'après la dixième observation de l'angle, ces verniers marquent respectivement les nombres suivans, en tenant compte des circonférences entières parcourues durant la série,

	1re	2e	3e	4e
(*b*)	548g,112,	648g,108,	748g,100,	848g,105;

on prendra le complément à l'unité, des parties décimales comprises dans la ligne (*a*), toutes les fois qu'elles appartiendront à des nombres au-dessous de 100, 200 ou 300; et l'on affectera tous les restes du signe négatif. Ici l'on aura

	1re	2e	3e	4e
(*a'*)	+ 0,000,	+ 0,025,	— 0,015,	+ 0,015.

On procédera de même par rapport aux parties décimales comprises dans la ligne (*b*), si les nombres dont elles dépendent n'ont pas tous le même chiffre aux unités. Or, dans le cas actuel, cette circonstance n'ayant pas lieu, on a

	1re	2e	3e	4e
(*b'*)	+ 0,112,	+ 0,108,	+ 0,100,	+ 0,105.

Ensuite on fera une somme des fractions (*a'*), qui sera + 0,025, que l'on retranchera de celle des fractions (*b'*), c'est-à-dire de + 0,425; puis l'on divisera le reste + 0,400 par 4, et le quotient + 0,100 sera la partie décimale à ajouter au nombre 548g; de sorte que le décuple de l'angle mesuré sera définitivement 548g,100; donc l'angle simple = 54g,810.

On voit clairement par cette méthode, qui est générale, que le quart de la somme des nombres de la ligne (*a'*) marque le point de départ d'un vernier *moyen* parcourant l'arc moyen entre les quatre; tandis que le quart de la somme des nombres de la ligne (*b'*) désigne le point d'arrivée de ce même vernier.

Mais il y a moyen de simplifier un peu le calcul précédent. Pour cela, ajoutez toutes les décimales de la ligne (*a'*), et ôtez de la somme autant d'unités qu'il se trouvera de verniers marquant moins de 100g, ou 200 ou 300 : ici l'on a 0,025.

Ajoutez de même toutes les décimales de la ligne (*b*), et ôtez de la somme, ou ajoutez-y autant d'unités qu'il y aura de nombres où le chiffre des unités aura une valeur moindre ou plus forte que celui qui se trouve dans le nombre marqué par la ligne de foi du premier vernier. Enfin, de cette somme, ainsi diminuée ou augmentée s'il est nécessaire, soustrayez la première et divisez le reste par 4, c'est-

à-dire par le nombre des verniers; le quotient sera la partie décimale *moyenne* cherchée.

Voici le cas. Au commencement les verniers marquaient

0,000, 100,001, 199,998, 300,003;

à la fin de la dixième observation, ils indiquaient

532^{g},001, 631^{g},998, 732^{g},003, 832^{g},002.

Or, dans la première ligne, la somme des décimales diminuée de l'unité . . . . . = 0,002
dans la deuxième ligne, cette somme diminué de l'unité = 0,004

différence . . . . . = 0,002
$\frac{1}{4}$ . . . . . = 0,0005

Autre exemple. Au commencement, les verniers marquaient

0,000, 100,001, 199,998, 300,003;

à la fin de la dixième observation l'on avait

421,998, 522,001, 621,997, 721,996.

Or, la somme des premières fractions diminuée d'une unité = 0,002
celle des secondes fractions augmentée d'une unité . . . . = 3,992

différence . . . . . = 3,990
$\frac{1}{4}$ . . . . . = 0,9975

de là arc parcouru = 421^{g},9975, et angle mesuré = $\frac{421^{g},9975}{10}$ = 42^{g},19975.

On peut aussi se dispenser de faire la soustraction indiquée, en prenant le complément arithmétique et à l'unité de la somme des parties décimales marquées par le vernier au commencement de la série; ou, ce qui revient au même et ce qui est plus simple, on lit le vernier à contre-sens, en mettant par la pensée 10 à la place de zéro, et réciproquement. Bien entendu qu'il faut alors ôter du résultat autant d'unités qu'on a pris de complémens, si les verniers marquent des nombres au-dessus de 100, 200 et 300^{g}.

A moins qu'on ait peu de tems pour observer, il est toujours utile de noter tous les angles d'une même série, afin de pouvoir s'assurer de l'uniformité de sa marche. Voici l'ordre que l'on peut suivre à cet égard :

NOMBRE des observations.	ANGLES multiples.	ANGLES simples.	VERNIERS au point de départ.	VERNIERS au point d'arrivée.	
2	117g,389	58g,6945	0,000	901	1er
4	234,778	6945	0,005	904	2e
6	352,167	6945	0,005	900	3e
8	469,557	694625	0,008	902	4e
10	586,947	6947			
12	704,338	694833		3,607	
14	821,729	694928		0,000	compl arith.
16	939,122	695125		0,995	
18	1056,511	695055		0,995	
20	1173,901	695050		0,992	
Arc moyen parcouru	= 1173g,89725	58g,6948625	Somme = 3,589 Le quart = 0,89725		

Il n'est pas nécessaire de lire les quatre verniers chaque fois qu'on veut inscrire un angle multiple; i lsuffit de les observer au commencement et à la fin de la série, comme dans le tableau précédent. Ainsi, les fractions décimales des nombres de la seconde colonne ont seulement été indiquées par le premier vernier, à l'exception de celles du dernier nombre 1173,89752, qui sont le résultat de la combinaison des fractions insérées dans les deux dernières colonnes; combinaison faite d'après la troisième méthode exposée ci-dessus.

Il n'arrive pas toujours que les séries de cette espèce soient aussi régulières que la précédente; car les vapeurs qui s'élèvent quelquefois durant l'observation, par l'action d'un soleil ardent, produisent des ondulations qui font paraître les objets mobiles, et qui nuisent par conséquent à l'exactitude du pointé. De là ces anomalies qu'on remarque dans les séries d'un même angle. En général, les meilleures observations ont lieu pendant l'absence du soleil.

118. Dans les triangulations du premier ordre, il est convenable de prendre plusieurs séries d'un même angle à des jours différens; mais 3 séries de 20 observations, chacune prise dans les circonstances favorables et avec un cercle de 35 centimètres de diamètre,

sont toujours suffisantes. Néanmoins, comme le plus souvent elles diffèrent entre elles, on en prend la *moyenne arithmétique.*

Il n'est peut-être pas inutile de dire qu'on entend par *moyenne arithmétique,* le quotient qu'on obtient en divisant par le nombre total des observations la somme des produits du nombre des observations d'une même série, multiplié par l'arc parcouru sur le limbe. Si, par exemple, n est le nombre des observations de la première série, et A l'arc parcouru; que n' et A' soient relatifs à la seconde série; que n'' et A'' se rapportent à la troisième série; l'angle moyen sera $\frac{nA + n'A' + n''A''}{n + n' + n''}$. En faisant chaque série d'un même nombre d'observations, la règle est plus simple, puisqu'il ne s'agit que de diviser la somme des résultats par leur nombre.

De la mesure des distances zénitales.

119. La distance au zénit d'un objet est le complément de sa hauteur angulaire, ou sa dépression augmentée de 100 grades, ou, ce qui revient au même, l'angle entre cet objet et le zénit de l'observateur. Avant d'observer une distance zénitale, on mettra le limbe du cercle dans une situation verticale ainsi qu'il suit.

On disposera l'axe Y du limbe (pl. VI et V) dans une position à peu près horizontale, en desserrant la pince du quart de cercle et en renversant le limbe : ensuite, après avoir amené la bulle d'air du grand niveau df au milieu du tube, ce qui se fera d'abord en rendant libre la lunette inférieure, puis serrant son agrafe et faisant usage de sa vis de rappel, on fera tourner tout l'instrument sur sa colonne S, de manière que l'index, ou la ligne de foi du cercle azimutal zz', partant de la ligne de division qui se trouve vis-à-vis un des pieds de l'instrument, de V par exemple, parcoure une demi-circonférence. Si, dans cette état, la bulle d'air, après quelques oscillations, ne se fixe pas d'elle-même au milieu du tube, l'axe de la colonne ne sera pas dans un plan vertical; alors on fera la correction moitié avec la vis du pied V qui se trouve précisément au-dessous du grand niveau, moitié avec la vis de rappel R' de la lunette inférieure.

On ramènera l'index du cercle azimutal au point de départ; et si, dans cette première position, la bulle ne conserve pas le milieu du tube, on fera la correction qui vient d'être indiquée. On continuera cette épreuve jusqu'à ce que la bulle revienne d'elle-même entre ses

repères dans les deux positions de l'instrument. Alors l'axe de la colonne sera dans le plan vertical passant par zz'.

Ensuite, si après avoir placé l'index à 100^g du point où il se trouve maintenant, la bulle ne rentre pas entre ses repères, on l'y ramènera en faisant la correction moitié avec la vis V', moitié avec la vis V'', c'est-à-dire en élevant l'une et abaissant l'autre d'une égale quantité. De cette manière, l'axe S de la colonne du cercle se trouvera à la fois dans deux plans verticaux, et sera par conséquent vertical. Ainsi, quelque part que soit placé l'index du cercle azimutal, la bulle reviendra au milieu du tube pour s'y fixer. Cependant, si l'instrument a quelque petit défaut de construction, ou bien si l'opération que l'on vient d'indiquer n'a pas été faite avec toute l'exactitude possible, la bulle sera errante, lorsqu'on fera tourner la colonne S, et qu'on arrêtera l'index sur différens points de la circonférence; il faudra donc pour la rendre stationnaire au milieu du tube, faire de légères corrections, en procédant comme ci-dessus. Au surplus, la verticalité de la colonne n'est pas d'une nécessité absolue; elle dispense seulement de caler sans cesse les niveaux quand on observe une distance au zénit.

Enfin, l'on mettra avec beaucoup de soin le limbe de l'instrument dans une position verticale, à l'aide du fil-à-plomb dont il a été parlé à l'art. 113; ou mieux encore, au moyen d'un niveau à bulle d'air disposé pour cet effet. Alors si le petit niveau gh que porte l'axe Y du cercle est incliné à l'horizon, on le calera au moyen de la vis de rappel qui y est adaptée, et l'on serrera la pince du quart de cercle, afin que le limbe ne puisse plus se déranger à l'égard de l'axe de la colonne. Lorsqu'en manœuvrant l'instrument, l'horizontalité du petit niveau n'aura plus lieu, on la rétablira en tournant dans le sens convenable la vis du pied qui se trouvera à peu près dans la direction de ce niveau, et cela afin de remettre le limbe vertical.

Maintenant, pour mesurer une distance au zénit, l'observateur fixera à zéro l'un des verniers de la lunette supérieure, et placera cette lunette à sa droite, si les divisions de l'instrument sont numérotées de gauche à droite; ensuite, il la dirigera sur l'objet, en détachant la vis tangente, puis faisant engrener cette vis pour procurer un mouvement lent à cette lunette. Alors l'aide observateur placera horizontalement la lunette inférieure qui porte le grand niveau, en la faisant mouvoir indépendamment du limbe. Lorsque la bulle restera

au milieu du tube, en même tems que le point de mire sera sous le fil horizontal du réticule, ce que chaque observateur saura en s'avertissant mutuellement, on aura la première partie de l'observation, et le cercle sera à la droite de celui qui pointe sur l'objet.

On fera ensuite tourner tout l'instrument sur sa colonne, jusqu'à ce que l'index du cercle azimutal ait parcouru une demi-circonférence, c'est-à-dire que le limbe soit à la gauche de l'observateur dans le vertical de l'objet; et pendant que l'aide observateur, toujours placé à l'opposé des divisions du limbe, ramènera la lunette inférieure dans la position horizontale pour caler le grand niveau, en faisant tourner le limbe à l'aide de la vis tangente du tambour, l'observateur fera mouvoir la lunette supérieure, qu'il aura rendue libre, jusqu'à ce que le point de mire soit exactement sous le fil horizontal. Pour parvenir à ce but, il aura soin de serrer l'agrafe de cette lunette et de faire usage de la vis de rappel. Mais ce mouvement, imprimé à la lunette supérieure, aura pu déranger la bulle du grand niveau; il faudra donc la replacer entre ses repères, ou la caler en faisant tourner la vis tangente, et ensuite ramener l'axe optique de la lunette supérieure sur le point de mire, au moyen de sa vis de rappel. Lorsque le grand et le petit niveau seront calés, et que l'objet sera en même tems sous le fil, on aura la seconde partie de l'observation, et l'arc parcouru par le vernier de cette lunette sera le double de la distance zénitale cherchée.

En effet, soit C le centre du limbe (pl. V, n° 2), AB la direction de la lunette lors de la première observation, et CH la ligne horizontale déterminée par le grand niveau. Lorsqu'on tourne le limbe à gauche pour faire la seconde observation conjuguée, et que l'on cale derechef le niveau, la lunette supérieure prend la direction $A'B'$, c'est-à-dire qu'elle fait avec la ligne horizontale CH le même angle qu'auparavant, mais en sens contraire. Donc le point O, d'où l'on compte les grades, se trouve alors en O'; donc, si on détache la lunette supérieure pour la ramener sur l'objet B, le point O' reviendra en O, en parcourant l'arc OZO'. Mais cet arc est évidemment le double de la distance zénitale ZCO cherchée; donc à la fin de la seconde observation conjuguée, on a le double de cette distance.

En répétant plusieurs fois cette opération, et partant toujours du point où s'est arrêtée la ligne de foi du premier vernier à la fin de la seconde observation conjuguée, l'on parviendra au quadruple, au

sextuple, etc., de la distance zénitale, et l'on atténuera les erreurs du pointé et de la division, comme dans la mesure des angles entre les objets terrestres.

Nous prescrirons de mettre, avant tout, une des branches du pied de l'instrument dans le plan de l'angle à mesurer; voici pourquoi. Dans la deuxième partie de l'observation, l'on est obligé, pour caler le grand niveau, de faire tourner le limbe autour de son axe; mais les filets de la vis tangente qui produit ce mouvement, étant trop espacés les uns des autres, il n'est guère possible d'amener exactement par ce moyen la bulle au milieu du tube. Aussi, quand la correction est légère, vaut-il mieux la faire avec la vis V du pied, qui se trouve précisément au-dessous du grand niveau, et qui procure un mouvement très doux, sur-tout si, au lieu de cette vis, on fait agir celle de l'étrier *ee'* sur lequel elle pose. On peut aussi, par la même raison, amener le fil horizontal de la lunette sur l'objet, avec cette même vis, lorsqu'on fait les observations impaires, puisqu'alors cette lunette est fixée au limbe. Ce mouvement de la vis dont il s'agit ne dérange pas le limbe de sa position verticale, ce qui est évident.

120. Malgré toutes ces précautions, il en est encore d'autres à prendre pour obtenir la plus grande précision possible. Par exemple, comme on n'est pas toujours sûr que le point de mire soit exactement sous l'axe du fil, il importe, pour ne pas tenir compte de la demi-épaisseur de ce fil, s'il est d'un diamètre assez sensible, de mettre successivement ses bords supérieur et inférieur en contact avec le point de mire; parce que si l'angle observé est plus petit dans l'observation impaire, il sera plus grand de la même quantité dans l'observation paire, ou réciproquement.

De plus, comme il est commode de mettre le point de mire à une petite distance du fil vertical, et que rien ne peut faire juger de la parfaite horizontalité de l'autre fil, voici la manière de se prémunir contre l'erreur que causerait la petite inclinaison de ce dernier fil.

Si, lors de la première partie de l'observation, le point de mire *m* (pl. V, n° 1) paraît dans la lunette à la droite du fil vertical *AV*, il sera réellement entre ce fil et le limbe, puisque les objets sont vus renversés; et l'angle *HAX* représentera l'erreur commise sur la distance zénitale, si *Hh* est la vraie position du second fil à l'égard de l'horizontale *AX*. Mais la lunette se renversant dans la deuxième partie de l'observation, il s'ensuit que le fil *AH* sera incliné dans le même sens

par rapport à l'observateur. Si donc l'on place l'image du point de mire en m', c'est-à-dire à gauche du fil AV et de manière que $Am' = Am$, la nouvelle erreur faite sur la distance au zénit sera $= xAh$, c'est-à-dire égale, mais de signe contraire à la précédente; ainsi, il y aura compensation. Il est donc évident que le point de mire se retrouvera réellement entre le fil vertical et le limbe, et au même point physique.

Dans tous ceci nous avons fait abstraction de l'excentricité de la lunette supérieure, parce qu'elle n'existe pas dans les cercles que l'on construit maintenant; d'ailleurs, eût-elle lieu comme dans la figure citée, la mesure des distances au zénit ne subirait pour cela aucune correction, parce que celle qui est relative à la seconde observation conjuguée est égale et de signe contraire à la correction qui se manifeste pendant la première observation, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer.

Les distances zénitales des objets terrestres servent pour réduire les angles à l'horizon, et faire connaître les différences de niveau des stations.

121. Il arrive quelquefois que le lieu de l'observation ne permet pas de faire faire au limbe une demi-révolution. Dans ce cas, on le laisse dans la position la plus favorable, et l'on mesure la distance zénitale, en faisant des observations successives analogues à celles décrites à l'art. 116; c'est ce que l'on concevra encore mieux par ce qui suit.

Après avoir mis le cercle dans une position verticale, dirigez la lunette supérieure, mise à zéro; sur un objet très éloigné; amenez-y aussi la lunette inférieure, afin de rendre les deux axes optiques parallèles. Cela fait, et sans détacher du limbe la lunette inférieure, calez son niveau à l'aide de la vis tangente, puis rendez libre la lunette supérieure, pour la pointer sur l'objet dont on désire connaître la distance zénitale, et fixez-la dans cette position; alors l'arc qu'elle aura parcouru sera l'angle de hauteur ou de dépression cherché.

Pour doubler cet angle, refaites la même opération, comme si la lunette supérieure était fixée sur zéro. Cette lunette parcourra ensuite un nouvel arc qui, ajouté au premier, sera la mesure du double de l'angle cherché. On pourrait de même se procurer le triple, le quadruple, etc., de cet angle. Mais l'on conçoit bien qu'il sera affecté d'une erreur occasionnée par le défaut de parallélisme de l'axe optique

de la lunette inférieure et de l'axe de son niveau, qui est dépourvu de moyens de rectification : c'est là ce qu'on nomme l'erreur de *collimation*.

122. C'est ici le cas de dire comment on détermine le degré de sensibilité du grand niveau. Pour cet effet, mettez le limbe vertical, comme pour prendre une distance au zénit; fixez la lunette supérieure à zéro, et dirigez-la sur un objet quelconque, en faisant tourner le limbe avec la vis du tambour, jusqu'à ce que cet objet soit sous le fil horizontal. Desserrez la lunette inférieure, pour amener une des extrémités de la bulle du grand niveau vis-à-vis le trait de division extrême de la règle qui supporte ce niveau, et voyez si la lunette supérieure ne s'est pas dérangée. Ensuite faites tourner la vis du tambour, jusqu'à ce que la même extrémité de la bulle arrive à l'autre trait de division extrême, pourvu toutefois que l'autre extrémité de la bulle n'atteigne pas celle du tube. Ensuite, ramenez la lunette supérieure sur le point de mire, en faisant usage de sa vis de rappel. Enfin, lisez le nombre de parties de la règle parcouru par la bulle : ce nombre n sera celui qui correspond à l'arc décrit par la lunette supérieure. Mais cet arc étant trop petit pour pouvoir être lu exactement, recommencez la même opération comme si la lunette supérieure partait de zéro, et vous aurez le double de l'angle correspondant au même nombre de parties d'inclinaison du niveau. Continuez de la même manière jusqu'à ce que vous ayez, par exemple, le décuple de l'angle cherché. Enfin, divisez cet angle A par le nombre n de parties, et le quotient $\frac{A}{n}$ sera le nombre de secondes correspondant à une partie d'inclinaison du niveau.

On est sur-tout obligé d'évaluer cette inclinaison, lorsque l'on opère avec un cercle à *niveau fixe*. Ce niveau, au lieu d'être adapté à la lunette inférieure, est fixé sur la colonne, et se trouve par conséquent tout-à-fait indépendant du limbe. Il est des observateurs qui préfèrent de beaucoup le niveau fixe au niveau mobile; parce que, d'après cette nouvelle disposition, l'on observe avec une très grande promptitude les distances zénitales des astres.

123. Pour observer avec un niveau fixe, on desserre la vis du tambour, afin de donner toute liberté au limbe de tourner lorsqu'il est vertical. Cependant on peut l'arrêter au besoin, au moyen d'une

forte pince, qui fait corps avec la colonne, ou bien lui imprimer un mouvement de rotation très lent, à l'aide d'une vis de rappel adaptée à cette pince. Quant au grand niveau qui est, comme nous venons de le dire, fixé sur la colonne et entièrement isolé du cercle, il ne sert que pour mettre vertical l'axe de cette colonne, ou pour en faire connaître l'inclinaison. Ce niveau a aussi sa vis de rappel pour le caler, et est placé parallèlement au limbe.

Ceci étant bien compris, voici la manière de mesurer l'inclinaison de l'axe de la colonne, et d'évaluer son effet sur les distances zénitales.

Représentons par B la longueur actuelle de la bulle d'air du niveau, et supposons que l'artiste ait eu le soin de mettre le zéro de l'échelle exactement au milieu de cette bulle, lorsque le tube est horizontal. Dans cette position, les extrémités de la bulle marqueront les mêmes nombres; et si on retourne le niveau bout pour bout sans changer la position du plan sur lequel ce niveau repose, la bulle, après quelques oscillations, rentrera entre ses repères. Mais si on élève une des extrémités du niveau, l'extrémité droite par exemple, la liqueur obéissant à la loi de la pesanteur se déplacera, et portera la bulle vers la partie élevée; en sorte que l'extrémité droite de cette bulle marquera $\frac{1}{2}B + x = D$ parties de l'échelle, tandis que l'extrémité gauche marquera $\frac{1}{2}B - x = G$; puisque nous supposons que le tube est bien calibré, et que la bulle, pendant l'expérience, conserve sa longueur. Or, x désignant, en parties de l'échelle, l'inclinaison de l'axe du tube, on a $2x = D - G$; c'est-à-dire que le double de cette inclinaison est égal à la différence des nombres marqués par les deux extrémités de la bulle, quand le plan sur lequel s'appuie le niveau est horizontal.

Mais donnons au plan, dans le sens de la longueur du niveau, une inclinaison y telle que l'extrémité droite de la bulle marque

$$\tfrac{1}{2}B + x + y = D;$$

alors l'extrémité gauche marquera

$$\tfrac{1}{2}B - x - y = G.$$

Maintenant si nous retournons bout pour bout le niveau, sans rien changer d'ailleurs à la position du plan, l'extrémité droite de la bulle donnera

$$\tfrac{1}{2}B - x + y = D_1;$$

celle de gauche donnera au contraire

$$\tfrac{1}{2}B + x - y = G_1;$$

ainsi, de ces quatre équations l'on tirera

$$2x = D - D_1, \quad \text{ou} \quad x = \frac{D - D_1}{2},$$

$$2x = G_1 - G, \quad \text{ou} \quad x = \frac{G_1 - G}{2},$$

$$2y = D - G_1, \quad \text{ou} \quad y = \frac{D - G_1}{2},$$

$$2y = D_1 - G, \quad \text{ou} \quad y = \frac{D_1 - G}{2};$$

de là les deux règles suivantes, données par M. Delambre (*Astronomie*, tom. I, p. 82).

1°. *Le double de l'inclinaison du tube est égal à la différence des deux nombres de la droite; le second nombre se retranche du premier.*

Si x *est positif, le bout du tube qui était d'abord à droite, est plus élevé que celui qui était à gauche; si* x *est négatif, c'est le contraire.*

2°. *Le double de l'inclinaison du plan sur lequel s'appuie le niveau, est égal à la différence des nombres indiqués successivement par l'extrémité qui était d'abord à droite; le second nombre se retranche du premier.*

Si y *est positif, c'est la partie droite du plan qui est la plus élevée; ce serait le contraire si* y *était négatif.*

Ce que nous disons du plan, doit s'entendre de l'axe de la colonne du cercle qui porte le niveau. Ainsi, dans l'observation d'une distance zénitale avec un cercle à niveau fixe, on doit toujours considérer la même extrémité physique de la bulle avant et après le retournement du cercle, pour évaluer l'inclinaison de l'axe de la colonne.

Supposons, par exemple, que le cercle étant dans sa première position, G soit l'extrémité de la bulle dirigée vers l'objet, et D soit l'extrémité située du côté de l'observateur. Dans la seconde position du cercle, les mêmes extrémités physiques changeront de nom, puisque le bout du niveau qui était tourné vers l'objet sera au contraire tourné vers l'observateur; ainsi D deviendra G_1 et G devien-

dra D_1. Si donc dans le cours d'une observation de distance zénitale, on lit à chaque position du cercle, les parties du niveau marquées par les deux extrémités de la bulle, afin d'obtenir plus de précision, et qu'on désigne généralement par G les parties correspondantes à l'extrémité *objet*, par D les parties correspondantes au même instant à l'extrémité *observateur*, les diverses valeurs de y seront renfermées dans les deux suites suivantes :

NOMBRE des observations.	— objet + observateur	+ observat. — objet	Limbe à droite. Limbe à gauche.
2.	$2y_{,} = \left\{ \begin{array}{l} -G \\ +D_1 \end{array} \right.$	$2y' = \left\{ \begin{array}{l} +D \\ -G_1 \end{array} \right.$	
4.	$2y_{,,} = \left\{ \begin{array}{l} -G_2 \\ +D_3 \end{array} \right.$	$2y'' = \left\{ \begin{array}{l} +D_2 \\ -G_3 \end{array} \right.$	
6.	$2y_{,,,} = \left\{ \begin{array}{l} -G_4 \\ +D_5 \end{array} \right.$	$2y''' = \left\{ \begin{array}{l} +D_4 \\ -G_5 \end{array} \right.$	

Il faut faire attention que si le niveau, supposé perpendiculaire à l'axe de la colonne, est élevé du côté de D ou de l'observateur, cet axe prolongé vers le zénit passera entre ce point et le rayon visuel dirigé sur l'objet. Or, comme on rapporte la distance zénitale à l'axe de rotation du cercle pris pour verticale apparente, il est clair que l'inclinaison de cet axe doit s'ajouter à la distance zénitale observée : c'est en effet ce que suppose le tableau précédent.

Toutes les valeurs de $2y_{,}$, $2y_{,,}$, $2y_{,,,}$. . . . données par la même extrémité physique de la bulle, seraient égales entre elles, si l'axe de rotation n'éprouvait aucun dérangement pendant tout le tems qu'on observe; il en serait de même des valeurs de $2y'$, $2y''$, $2y'''$. . . De plus, ces deux séries seraient identiques; mais comme il n'en est pas tout-à-fait ainsi, il est convenable de prendre la moyenne entre toutes les valeurs précédentes de y, c'est-à-dire de faire une somme de toutes les différences $2y'$, $2y''$, ... $2y_{,}$, $2y_{,,}$,... et de la diviser par le double du nombre des observations simples. De cette manière, on aura un arc moyen y, lequel étant converti en secondes (art. 122), s'ajoutera à l'angle observé, ou s'en retranchera, selon que la somme des termes positifs sera plus grande ou plus petite que celle des termes négatifs.

Pour plus de clarté, voici une série prise à l'Observatoire du Dépôt de la Guerrre, avec un grand cercle de Lenoir, auquel cet artiste avait adapté un niveau fixe.

NOMBRE des observations.	ARC parcouru sur le limbe	MARCHE DU NIVEAU FIXE. objet — observateur +	diff. a.	observateur + objet —	diff. b.
1....	...0g.....	52		52	
2....	.....	49	— 3	55	— 3
3....	.....	51		53	
4....	.....	50	— 1	54,5	— 1,5
5....	.....	51		54	
6....	.....	50	— 1	55	— 1
7....	.....	51		54	
8....	.....	49	— 2	56	— 2
9....	.....	50		55	
n = 10....	.858g,9125.....	49	— 1	56	— 1

Arc moyen = 85g,8912,50
Corr. du niv. = — 9,50
Dist. zénith. = 85g,8903,00

Somme des a = — 8 Som. des b = — 8,5
Inclinaison de l'axe de rotat. $\frac{a+b}{2n}$ = — 0,825
Facteur constant..... 11 ,51
Prod. ou corr. du niveau — 9",50

Le facteur constant 11",51 est la valeur d'une partie du niveau en secondes centésimales; il a été déterminé avec beaucoup de soin par la méthode de l'art. 122; néanmoins il est trop grand pour que la correction soit sûre. Les niveaux de Fortin paraissent ne laisser rien à désirer : il en existe de cet artiste, qui sont d'une sensibilité telle, que la bulle parcourt régulièrement 3 millimètres quand l'axe s'incline de 1" sexagésimale; d'où il est aisé de conclure que le rayon de courbure de la paroi intérieure et longitudinale du tube est de 618m,7944 (*Astr. phys.* de M. Biot, tom. I, pag. 336).

124. D'après l'idée que nous avons donnée de la construction du cercle à niveau fixe, on doit en inférer que la vis tangente du tambour est remplacée par la vis de la pince ajustée à la colonne, lorsqu'on

fait usage de cet instrument pour observer les distances zénitales; que cette pince doit fixer tellement le limbe à cette colonne ou à la plaque qui lui est adhérente, qu'il ne puisse avoir le moindre mouvement de rotation, en passant de la première à la seconde observation conjuguée; mais que rien n'avertit du contraire, puisque le niveau est indépendant du limbe; qu'enfin, ce niveau pourrait bien être ramené chaque fois à la position horizontale, ou entre les mêmes repères, comme dans les cercles ordinaires, au moyen d'une des vis du pied; mais qu'on opère plus commodément et plus rapidement, en concluant l'inclinaison de l'axe de rotation des diverses positions de la bulle. Toutefois l'on n'est pas dispensé d'avoir un aide uniquement chargé d'observer cette bulle, sur-tout si le cercle n'est pas établi sur un corps parfaitement stable; car l'observateur en allant de la lunette au niveau, changerait l'inclinaison de l'axe, en dérangeant par son propre poids la position du centre de gravité du système; inclinaison qui doit être invariable pendant la durée de deux observations conjuguées.

Une autre remarque non moins essentielle à faire, c'est qu'il importe que le limbe soit maintenu dans sa position verticale, pendant toute la durée des observations (art. 119).

Lorsqu'on fait une longue suite d'observations de distances zénitales d'un même objet, on fait varier chaque jour l'inclinaison de l'axe de rotation du cercle, de manière que la correction du niveau soit tantôt positive, tantôt négative. Par là, on donne lieu à des compensations qui rendent les résultats moyens plus indépendans des parties du niveau.

Du Théodolite répétiteur.

125. Quoique le calcul de la réduction des angles à l'horizon soit bien simple, comme on le verra par la suite, il serait cependant à désirer, dans plusieurs circonstances, que le cercle répétiteur fût garni de lunettes *plongeantes*, c'est-à-dire de lunettes qui eussent chacune la propriété de se mouvoir de plusieurs grades dans un plan parfaitement perpendiculaire au limbe; parce qu'en le disposant toujours horizontalement à l'aide de deux niveaux placés à angle droit et attachés au limbe, il en résulterait que les angles observés seraient naturellement réduits à l'horizon. Les théodolites répétiteurs de M. Reichenbach, bien supérieurs à tous ceux qu'on a construits jusqu'à présent, jouissent précisément de cette propriété. La lunette

inférieure de cet instrument, qui ne sert que de repère, a un petit jeu dans le sens vertical et dans le sens horizontal; mais la lunette supérieure AB (pl. XI) est traversée par un axe bien calibré, et dont les extrémités C, C' entrent dans des collets égaux élevés de quelques centimètres au-dessus du limbe ou s'appuient sur deux plans inclinés, de sorte que cette lunette, ainsi placée sur ses supports, peut parcourir un arc de plusieurs degrés dans le plan perpendiculaire au limbe.

Il faut avant tout vérifier l'instrument, c'est-à-dire s'assurer si l'axe de rotation CC' de la lunette supérieure est horizontal et parallèle au limbe, et si l'axe optique de cette lunette décrit un plan perpendiculaire à cet axe de rotation. Pour cet effet, l'on se sert du niveau NN' suspendu à deux crochets parfaitement égaux ZZ', qu'on adapte à l'axe de rotation; et lorsqu'il est calé au moyen des vis du pied de l'instrument, cet axe doit se trouver horizontal. Néanmoins, pour plus de sûreté, on retourne le niveau bout pour bout, afin de voir si la bulle rentre dans ses repères : s'il arrivait le contraire, les deux crochets ne seraient pas égaux, et il faudrait corriger le niveau moitié avec sa vis de rappel, moitié avec la vis du pied qui incline l'axe de rotation. Enfin on dispose cet axe parallèlement au plan du limbe, à l'aide des vis des supports et du pied, et en procédant comme il a été dit à l'art. 119, pour placer horizontalement le cercle azimutal.

Il s'agit ensuite de rendre l'axe optique perpendiculaire à l'axe de rotation; or, c'est à quoi l'on parvient de la manière suivante. Dirigez la lunette supérieure sur un objet éloigné; ensuite renversez-la de manière que la partie supérieure devienne la partie inférieure. Dans cet état, le bout de l'axe qui était à droite se trouvera à gauche; et si lorsque la lunette est ramenée sur l'objet, l'axe optique ne répond pas au même point qu'avant le renversement, on fera mouvoir le réticule jusqu'à ce que l'intersection des fils partage en deux parties égales la moitié de la déviation observée; puis l'on donnera à tout l'instrument un mouvement horizontal, pour ramener l'axe optique sur le premier point de mire. On renversera de nouveau la lunette, et si elle donne encore lieu à une petite déviation, l'on fera la correction qui vient d'être indiquée. Après un petit nombre d'essais de ce genre, l'axe optique sera rectifié.

Le cercle vertical MM' donne les angles simples de hauteur ou de dépression; mais avec une médiocre exactitude.

Maintenant, pour mesurer avec cet instrument un angle entre

deux objets terrestres, dans l'hypothèse que les divisions se lisent de droite à gauche, comme dans la figure, on met d'abord le limbe horizontalement et l'un des verniers à zéro; ensuite on amène la lunette supérieure sur l'objet à gauche, en faisant tourner à la fois les deux limbes concentriques, et l'on dirige la lunette inférieure, qui est indépendante de ce mouvement, sur un objet quelconque pour servir de repère; puis l'on détache la lunette supérieure, afin de l'amener sur l'objet à droite, et pour lors l'arc que le vernier tracé sur le limbe intérieur a parcouru sur le limbe extérieur portant la graduation, est la mesure de l'angle proposé. On peut répéter indéfiniment cette mesure, en ramenant sur l'objet à gauche la lunette supérieure, par un mouvement de rotation imprimé au cercle, et laissant toujours la lunette inférieure dirigée sur le point de repère, ou l'y ramenant en cas de déviation; ensuite, en desserrant la lunette supérieure pour la ramener seule sur l'objet à droite : de cette manière, l'arc qu'elle aura parcouru sera la mesure du double de l'angle proposé. En répétant cette même opération, on aura le triple, le quadruple, le quintuple, etc., de cet angle; et il est visible que quoique les observations ne soient pas *croisées*, comme avec le cercle répétiteur ordinaire, on parviendra néanmoins, après un même nombre d'observations simples, au même degré d'exactitude, toutes choses égales d'ailleurs.

M. Reichenbach rend aussi ses théodolites doublement répétiteurs comme le sont les cercles de Borda. Deux de nos plus habiles artistes, MM. Gambey et Richer viennent de construire pour le Dépôt de la Guerre, des instrumens de cette espèce, qui ne laissent rien à desirer sous aucun rapport.

De l'usage du cercle dans les observations astronomiques.

126. Les observations azimutales se font en prenant la distance angulaire entre un astre voisin de l'horizon et un objet terrestre. La méthode qu'on emploie pour cette effet, ne diffère pas de celle par laquelle on mesure un angle sur le terrain; il est seulement à remarquer, 1°. que le cercle a besoin d'être ramené sans cesse dans le plan variable des objets, parce que l'astre s'éloigne ou s'approche continuellement de l'horizon; 2°. que l'on doit tenir compte de l'heure précise de la fin de chaque observation. Cette pratique demande une

grande habitude; aussi le théodolite répétiteur est-il de beaucoup préférable au cercle ordinaire, en pareille circonstance.

Si l'on observe une étoile, son diamètre est insensible, et se réduit à un point lumineux, même dans les plus forts télescopes; mais la lumière de l'étoile et le feu établi à l'objet terrestre, par exemple, une lampe à courant d'air munie d'un réflecteur parabolique, n'étant pas suffisans pour éclairer le champ des lunettes de manière à ce qu'on puisse bien distinguer les fils, si on observe pendant la nuit, on place un feu de bougie près de chaque objectif. L'observateur qui est chargé de pointer sur l'astre, ne le met pas exactement sous le fil vertical, afin que l'autre observateur ait le tems de ramener sa lunette sur l'objet terrestre, dans le cas où il y aurait un petit écart; ensuite l'un d'eux compte l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde que la pendule marque à l'instant où l'étoile passe sous le fil. Si une troisième personne était chargée de noter l'heure de l'observation, celle qui pointe sur l'astre l'avertirait, à l'instant du passage sous le fil, par un mot d'une seule syllabe.

Comme le mouvement de l'astre, par rapport au signal, est sensiblement uniforme pendant de courts intervalles de tems, comme de 8 à 10 minutes, on divise l'arc parcouru, par le nombre des observations; et l'arc moyen qui en résulte est assez exactement la distance de l'astre au signal, pour l'instant moyen entre ceux de toutes les observations.

Si on observait le soleil, on interposerait un verre noir entre l'œil et l'oculaire de la lunette du cercle, afin de pouvoir fixer cet astre sans danger; et l'on mettrait alternativement en contact avec le fil vertical son bord oriental et son bord occidental, pour éluder le demi-diamètre de cet astre; ayant soin d'ailleurs que le disque soit au même instant divisé en deux parties égales par le fil horizontal. Quand on préfère observer le même bord, il est essentiel d'indiquer celui qu'on a mis en contact avec le fil vertical, afin de savoir si l'arc de distance mesuré doit être augmenté ou diminué du demi-diamètre du Soleil; et il ne faut pas oublier que la lunette renversant les objets, le bord oriental apparent est le bord occidental vrai, *et vice versâ.*

127. S'il s'agissait de connaître la distance d'un astre au zénit, on procéderait encore comme on l'a expliqué à l'art. 119. Ainsi, lorsque cet astre est éloigné du méridien, l'arc parcouru par la lunette supérieure,

divisé par le nombre des observations, donnera, comme ci-dessus, pour quotient un arc moyen qui, eu égard à l'uniformité de la marche de l'astre pendant de petits intervalles de tems, de 8 à 10 minutes, par exemple, sera la distance au zénit, pour l'instant moyen entre ceux de toutes les observations. En mettant l'un après l'autre en contact avec le fil horizontal les bords supérieur et inférieur du Soleil, en sorte que le fil vertical passe le plus près possible du milieu du disque de cet astre, la distance trouvée sera celle du centre du Soleil au zénit.

Les observations de ce genre devant être faites dans le moins de tems possible, on se contente, pour éviter des longueurs, de lire les arcs parcourus par la lunette supérieure après 4, 6, 8 ou 10 observations, selon les cas. Les distances zénitales s'obtiennent très rapidement à l'aide d'un cercle à niveau fixe.

Si l'on observe une étoile qui ne soit pas de première grandeur, on évite de la mettre à l'intersection des fils, parce qu'il pourrait arriver qu'elle fût entièrement cachée, et qu'elle ne se trouvât pas exactement dans l'axe optique; mais on la place derrière le fil horizontal, le plus près possible de cet axe, et successivement à droite et à gauche du fil vertical, par la raison donnée à l'art. 120.

Pendant le crépuscule, et avec de fortes lunettes, on observe aisément les étoiles de seconde grandeur; il arrive cependant quelquefois qu'elles disparaissent avant d'être entièrement sous le fil, quand leur lumière est extrêmement faible. Cet inconvénient a également lieu lorsque l'on pointe sur une flèche très aiguë. Alors les observations sont trop incertaines pour en tenir compte.

Quand on observe pendant la nuit, on adapte ordinairement un *réflecteur F* (pl. III) à la lunette supérieure, pour éclairer les fils du côté de l'objectif, afin qu'ils paraissent en noir sur un fond clair. Ce réflecteur est formé d'une petite plaque de métal percée elliptiquement, argentée, et disposée convenablement pour réfléchir dans la lunette les rayons de lumière qui proviennent de la bougie attachée à la fourchette de l'instrument. Mais il est préférable d'éclairer les fils par une ouverture pratiquée au milieu de la lunette, et près de laquelle se trouve intérieurement le réflecteur.

Lorsqu'un astre est près du zénit, il est presqu'impossible de l'observer directement. Dans ce cas, l'on adapte à l'oculaire un verre prismatique, qui a la propriété de faire voir l'astre dans une direction perpendiculaire au limbe.

CHAPITRE IV.

De la correction à faire aux angles mesurés avec le cercle répétiteur, à raison de l'excentricité des lunettes.

128. Quoiqu'on ne soit plus dans l'usage de rendre les deux lunettes excentriques, nous allons cependant chercher la formule de correction qui convient à ce cas général.

Nous avons déjà dit que l'excentricité d'une lunette est la distance de son centre à l'axe de rotation du limbe. Soit $CE = e$ (fig. 18) l'excentricité de la lunette supérieure; $CD = e'$, l'excentricité de la lunette inférieure; D la distance de l'objet à droite; G celle de l'objet à gauche; et supposons toujours que les divisions du limbe se lisent de gauche à droite.

Lors de la première observation d'un angle entre deux objets A, B, la lunette supérieure, fixée sur zéro, a la position AE, et la lunette inférieure est dirigée suivant BD. Pour faire la deuxième observation conjuguée, on amène cette lunette inférieure sur l'objet à droite, en faisant tourner tout l'instrument sur son axe; et l'on dirige la lunette supérieure, rendue libre, sur l'objet à gauche, en sorte qu'elle prend la position BE'. Or, il est visible que cette lunette, à la fin de la seconde observation, a décrit une quantité angulaire égale à la somme des angles ECE', DCD'.

Cela posé, si on désigne par x l'angle cherché BCA, et par m l'arc parcouru sur le limbe, la mesure de l'angle DCF sera

$$y = ACE + BCD + x;$$

elle sera encore

$$y = BCE' + ACD' - x + m;$$

mais vu la petitesse des angles ou des *parallaxes* α, α', β, β',

$$ACE = 100^g - \alpha = 100^g - \frac{e}{D},$$

$$BCD = 100 - \beta = 100 - \frac{e'}{G},$$

$$BCE' = 100 - \beta' = 100 - \frac{e}{G},$$

$$ACD' = 100 - \alpha' = 100 - \frac{e'}{D};$$

ainsi, après avoir égalé les deux valeurs de y, simplifié et réduit en secondes (art. 91), on aura, pour la correction cherchée,

$$x - \frac{m}{2} = \frac{e - e'}{2D \sin 1''} - \frac{e - e'}{2G \sin 1''},$$

laquelle s'ajoutera à l'angle donné immédiatement par l'instrument, pour avoir le véritable angle de position ACB.

Cette formule, qui est générale, nous apprend, 1°. que si les deux excentricités sont égales et opposées, comme dans la planche III, la correction est nulle; 2°. que si les deux excentricités sont égales et du même côté, cette correction est, abstraction faite du signe, double de celle qui a lieu quand la lunette supérieure n'est point excentrique.

Il faut pourtant prévenir qu'il est très rare que l'on soit obligé de corriger les angles mesurés, de l'excentricité des lunettes; parce que cette correction est d'autant plus petite, que les côtés des triangles sont plus grands. M. Delambre, qui n'a donné cette correction que pour le cas où $e = 0$, l'a réduite en table, en supposant successivement $e' = -16$, $= -18$, $= -20$ lignes (*voyez* à ce sujet la page 102 de la *Base du Système métrique décimal*, tom. I).

Quant aux distances zénitales, elles ne sont point affectées de l'effet de l'excentricité de la lunette supérieure, comme nous l'avons déjà fait remarquer (art. 120). Mais ces distances pourraient, malgré tout, pécher par défaut, d'une quantité constante sans qu'on s'en aperçut. (*Astron. physiq.*, tom. I, pag. 327). Cela arriverait infailliblement si la lunette supérieure était décentrée, c'est-à-dire si l'anneau qui la retient à l'axe du limbe, avait un petit jeu à l'égard de cet axe. Cette erreur du *centrage* ne peut avoir lieu dans les cercles de Reichenbach; parce que, d'une part, l'axe dont il s'agit est conique, et que de l'autre, la lunette se trouve toujours en contact immédiat avec cet axe, par l'effet d'un petit ressort qui tend sans cesse à la faire avancer vers le plus gros bout.

Faisons voir, par un exemple numérique, l'effet peu sensible de l'excentricité de nos cercles actuels, et supposons pour cela, $e = 0$,

$e' = -20$ lignes $= -0^m,0452$, $D = 24000^m$, $G = 25000^m$; la formule ci-dessus se réduira à

$$x - \frac{m}{2} = \frac{e'}{2D \sin 1''} - \frac{e'}{2G \sin 1''},$$

de là

$$\begin{array}{rl} \log \frac{1}{2} e' = & 8,3541 \\ c.\log \sin 1'' = & \underline{5,8039} \\ & 4,1580 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4,1580 \\ c.\log D = & \underline{5,6198} \qquad c.\log G = \underline{5,6021} \\ \log 1^{er} \text{ terme} = & 9.7778 \qquad \log 2^e \text{ terme} = \underline{9.7601} \\ 1^{er} \text{ terme}, & + 0'',5995 \\ 2^e \text{ terme}, & - 0\ ,5756 \\ \text{Correction} & + \underline{0'',0239}. \end{array}$$

Ainsi, la correction d'excentricité serait, dans ce cas, de $0'',02$ de la division centésimale, et sans doute bien au-dessous de l'erreur de l'observation.

Il est facile de reconnaître que l'effet de l'excentricité des deux lunettes sur les trois angles d'un triangle se réduit à zéro; car, en désignant par a, b, c les côtés d'un triangle, l'effet de l'excentricité sur chacun de ses angles sera

$$\begin{array}{ll} \text{pour l'angle } A, & \frac{e-e'}{2c} - \frac{e-e'}{2b}, \\ \text{pour l'angle } B, & \frac{e-e'}{2a} - \frac{e-e'}{2c}, \\ \text{pour l'angle } C, & \frac{e-e'}{2b} - \frac{e-e'}{2a}; \end{array}$$

d'où l'on voit que ces trois valeurs étant réunies, se réduisent à zéro.

CHAPITRE V.

De la réduction des angles d'un plan à un autre plan.

Réduction à l'horizon.

129. QUAND les angles de position ne sont pas situés dans le plan horizontal mené par le lieu de l'observateur, et que les lunettes de l'instrument dont on se sert restent constamment parallèles au limbe, comme dans les cercles répétiteurs, ces angles de position doivent être réduits à l'horizon de leurs sommets respectifs. Les élémens de cette réduction sont, pour chaque angle, les distances zénitales des deux objets observés.

Soit z (fig. 19) le zénit de l'observateur, qui du point C a observé l'angle BCA incliné à l'horizon $B'CA'$. Cet angle aura, pour *projection horizontale*, l'angle $B'CA'$ qu'il s'agit de trouver, et qui est formé par les plans verticaux ACA', BCB', dans lesquels sont situés respectivement les signaux AA', BB'. Mais l'angle $B'CA'$ est le même que l'angle sphérique z du triangle zab formé par trois arcs de grand cercle, dont l'un za est la distance au zénit de l'objet A; l'autre zb, la distance au zénit de l'objet B; et le troisième ab, la mesure de l'angle observé BCA. Donc, si δ, δ' sont les distances au zénit connues za, zb, et que C soit l'angle de position BCA, on connaîtra les trois côtés du triangle sphérique abz; ainsi, en se conformant à la notation actuelle, l'angle z sera donné par la formule de l'art. 74, savoir :

$$\sin \tfrac{1}{2} z = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{s}{2} - \delta\right)\sin\left(\frac{s}{2} - \delta'\right)}{\sin \delta \sin \delta'}},$$

s désignant la somme des trois côtés C, δ, δ', et le rayon des tables étant égal à l'unité.

Soient

angle de position, $C = 65^g,456$
dist. zénitale de A, $\delta = 86,250$
dist. zénitale de B, $\delta' = 85,400$

on aura somme $s = 237,106$

$\frac{1}{2}$ somme $\frac{s}{2} = 118,553$ $\qquad 118^g,553,$

$\delta = 86,250$ $\qquad \delta' = 85,400,$

$\frac{s}{2} - \delta = 32,303;$ $\qquad \frac{s}{2} - \delta' = 33,153;$

et l'opération, par les logarithmes, sera

$\log \sin\left(\frac{s}{2} - \delta\right) = \log \sin 32^g,303 \ldots$ 9,6865639

$\log \sin\left(\frac{s}{2} - \delta'\right) = \log \sin 33,153 \ldots$ 9,6968322

compl. $\log \sin \delta \ldots\ldots\ldots\ldots$ 0,0102095

compl. $\log \sin \delta' \ldots\ldots\ldots\ldots$ 0,0115224

$\log \sin \frac{1}{2} z \ldots\ldots\ldots\ldots$ 19,4051280

moitié, ou $\log \sin \frac{1}{2} z \ldots\ldots\ldots\ldots$ $9,7025640 = 33^g,6392;$

ainsi, la projection de l'angle C, ou cet angle réduit à l'horizon $= 67^g,2784$.

Il est bien rare que les distances au zénit soient aussi petites que dans l'exemple ci-dessus; et si elles ne différaient de l'angle droit que de 2 ou 3 grades, la formule précédente deviendrait trop pénible à calculer, pour avoir avec exactitude la projection de l'angle observé. Il vaut mieux alors chercher la réduction, qui n'est que de quelques secondes. Cette réduction s'obtient par la formule suivante:

$$x = \left(100^g - \frac{\delta + \delta'}{2}\right)^2 . \tang \tfrac{1}{2} C \sin 1'' - \left(\frac{\delta - \delta'}{2}\right)^2 . \cot \tfrac{1}{2} C . \sin 1'',$$

qui n'est autre que celle (2') de l'art. 96, dans laquelle on a mis $100^g - \delta$ pour α, et $100^g - \delta'$ pour β.

Supposons qu'un angle observé ait pour valeur $C = 56^g,9652$, et qu'il soit compris entre deux objets dont les distances zénitales soient

$\delta = 98^g,2530$
$\delta' = 99,0525$

on aura $\delta + \delta' = 197,3055$
$\delta - \delta' = 0,7995;$

$$100^g - \frac{\delta + \delta'}{2} = 1{,}3472'' = p, \qquad \frac{\delta - \delta'}{2} = 0{,}3997'' = q.$$

1er terme positif.		2e terme négatif.	
$\log \sin 1'' =$	$4{,}19612$		$4{,}19612$
$2\log p =$	$8{,}25886$	$2\log q =$	$7{,}20347$
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} C =$	$9{,}68111$	$\log \cot \frac{1}{2} C =$	$0{,}31889$
	$+ 2{,}13609 = 136'',83$		$- 1{,}71848 = 52'',30;$
	$- 52{,}30$		
réduction.....	$+ 84{,}53$		
angle de position....	$56^g{,}9652{,}00$		
angle réduit à l'horizon,	$56^g{,}9736{,}53.$		

Le calcul de cette réduction s'abrège beaucoup au moyen des tables I et II, qui se trouvent à la fin de cet ouvrage. La première a pour *argument* l'angle observé, c'est-à-dire le nombre qui sert pour entrer dans cette table, et vis-à-vis duquel on trouve un des facteurs des termes de la réduction. La seconde table a pour argument $200^g - (\delta + \delta')$ ou $\delta - \delta'$, et donne les autres facteurs des termes dont il s'agit.

Par exemple, avec l'angle observé, qu'on vient de réduire, les colonnes de la table I, intitulées tangentes et cotangentes donnent

$$+ 30'',54, \qquad - 132'',71;$$

et avec les angles $200^g - (\delta + \delta')$, et $\delta - \delta'$ la table II donne les deux autres facteurs

$$4{,}48, \qquad 0{,}394;$$

multipliant respectivement par ceux-ci les deux précédens, les deux termes de la réduction seront

$$+ 136'',82, \qquad - 52'',29;$$

réunissant ces deux produits, qui sont toujours de signes contraires, on aura, comme ci-dessus, pour la réduction totale, $+ 84'',53$.

Nous avons donné des tables toutes semblables, calculées dans le système sexagésimal; elles sont extraites de l'ouvrage de M. Delambre. Lorsqu'on voudra en faire usage, et qu'on aura observé un angle avec un cercle divisé en grades, on réduira cette angle en degrés, ainsi qu'il suit :

Soit proposé de convertir en degrés sexagésimaux l'angle de. . . . . 101^{g},66950
on retranche le dixième . . . . . 10 ,166950

on a pour reste en degrés et décimales . . . . . 91°,502550
multipliant la fraction par 60, on obtient . . . . . 91 ,30′,153

multipliant encore la fraction décimale par 60, il vient enfin en degrés, minutes, etc. . . . . 91°30′9″,18.

S'il s'agissait de résoudre le problème inverse, on s'y prendrait de la manière suivante. Pour convertir en grades, par exemple, l'angle de 91°30′9″,18, on réduit les secondes en fractions décimales de minutes, en divisant 9″,18 par 60, et il vient . . . 91°30′,153;
on réduit les minutes en fraction décimale de degrés, en divisant de même par 60, et l'on trouve. . . . . 91°,50255
on ajoute le neuvième . . . . . 10 ,16695

et l'on a en grades . . . . . 101^{g},66950

Ces deux règles sont évidemment fondées sur ce que le grade est au degré dans le rapport de 10 à 9.

Lorsque les distances zénitales doivent être employées, comme dans l'exemple précédent, pour réduire les angles à l'horizon, il est nécessaire qu'elles soient observées avant, ou immédiatement après ces derniers, afin qu'elles se rapportent autant que possible aux mêmes circonstances atmosphériques, quoiqu'une erreur de plusieurs secondes soit à cet égard de peu de conséquence.

On conçoit aisément que lorsque les trois angles d'un triangle sont réduits à l'horizon, ils représentent ceux d'un triangle sphérique dont les côtés sont compris entre les verticales des trois signaux observés, si toutefois les observations ont été faites dans l'axe même de ces signaux : autrement il faudrait réduire les angles horizontaux aux centres des stations, afin qu'ils jouissent de cette propriété; c'est ce que nous enseignerons bientôt.

Réduction des angles horizontaux aux angles des cordes.

150. Il est des géomètres qui, à l'exemple de M. Delambre, réduisent les triangles sphériques aux triangles rectilignes formés par les trois cordes, et déterminent, par le moyen de ceux-ci, les distances respectives des objets. Cette méthode, qui a tout le degré

d'exactitude que l'on peut désirer, exige que l'on réduise d'abord les angles horizontaux aux angles des cordes, et que l'on substitue ensuite à la *ligne géodésique*, prise pour base, la distance rectiligne qui joint ses extrémités (art. 108). De ces deux problèmes, le premier est le seul qui nous intéresse pour le moment, et se trouve résolu à l'art. 64 : car soit le triangle sphérique ABC (fig. 20) qu'il faille réduire au triangle rectiligne $A'B'C'$; si a, b, c sont les côtés du premier, opposés aux angles A, B, C, et a', b', c' les côtés du second, opposés aux angles A', B', C'; que du point C, comme centre, on décrive avec un rayon $= 1$, les arcs $z'\alpha'$, $z'\beta'$, $\alpha'\beta'$, et qu'on mène aux arcs b, a les tangentes ou les horizontales CT, CT'; l'angle de dépression $T'CB$, formé par une corde et une tangente, aura pour mesure $\frac{1}{2}a$, ou la moitié de l'arc connu AC. De même l'angle de dépression TCA sera $= \frac{1}{2}b$.

Cela posé, l'arc $z'\beta' = 100^g - \frac{1}{2}a$, l'arc $z'\alpha' = 100^g - \frac{1}{2}b$, et l'angle horizontal TCT' est donné; ainsi dans le triangle sphérique $z'\alpha'\beta'$, on connaîtra deux côtés et l'angle compris : reste donc à trouver le troisième côté $\alpha'\beta'$, ou l'angle C' qui est l'angle horizontal réduit à l'angle des cordes. Mais sans faire usage de la formule de l'art. 64, laquelle serait d'ailleurs peu propre à donner l'angle cherché avec précision, vu la petitesse de a et de b, il est clair que la question à résoudre est précisément l'inverse de la précédente. Si donc on dénote par ω la réduction cherchée, et par C l'angle horizontal connu, on aura (art. 96), et à cause de $-\alpha = \frac{a}{2}$, $-\beta = \frac{b}{2}$,

$$\omega = -\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}C \sin 1'' + \frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \cot\frac{1}{2}C \sin 1'',$$

formule dans laquelle a et b sont toujours de même signe. Pour en faire l'application, il faut commencer par calculer approximativement les côtés des triangles considérés comme rectilignes, en supposant que les observations ont été faites aux centres des signaux, ensuite convertir les côtés a et b en minutes centésimales.

Si, pour se conformer aux notations ultérieures, on désigne a par K, et b par K', et qu'on représente par G la longueur du grade moyen pour le lieu où l'on opère; ces arcs seront convertis en minutes centésimales, par ces formules

$$\varphi = \frac{100^{\prime}.K}{G}, \qquad \varphi' = \frac{100^{\prime}.K'}{G}.$$

Mais cette conversion, pour l'objet qu'on se propose, sera suffisamment exacte en supposant la Terre sphérique, et par conséquent G de 100000 mètres; donc alors

$$\varphi = \frac{K}{1000}, \qquad \varphi' = \frac{K'}{1000}.$$

Supposons, par exemple, $K = 24110^{m}$,
$K' = 25930^{m}$,

et angle observé réduit à l'horizon, ou $C = 68^{g},03346$;
on aura

$$\varphi = 24',11, \qquad \varphi' = 25',93;$$

et par suite

$$\frac{\varphi}{2} \text{ ou } P = 12',05$$
$$\frac{\varphi'}{2} \text{ ou } P' = 12,96$$
$$P + P' = 25,01$$
$$P - P' = 0,91.$$

Maintenant avec les nombres $P + P'$, $P - P'$, on trouvera dans la table II, les facteurs 0,039, 0,000
avec l'angle horizontal $68^{g},03$ . . . on trouvera dans la table I et aux colonnes intitulées *tang, cot*, ... — 37",68 + 107",65;
multipliant ces quantités par ordre, on aura, pour le premier et le deuxième terme de la réduction . . . . . — 1",47 + 0",00.

Or, l'angle horizontal . . . . . $C = 68^{g},0334,60$
donc, l'angle réduit au plan des cordes,
ou . . . . . $C' = 68^{g},0333,13$.

M. Delambre a fait des applications de cette méthode dans le calcul des triangles de la méridienne. Nous reviendrons sur ce sujet; cependant nous ferons observer, pour le moment, que l'évaluation des arcs en minutes se ferait avec plus de précision, si l'on connaissait leur véritable rayon de courbure; mais, dans l'ignorance où l'on est à cet égard, il convient de prendre le degré de la sphère dont la surface s'écarte peu de celle de la Terre, dans le lieu de l'observation. Or, on verra par la suite, que le degré moyen consi-

déré comme la 360e partie de la circonférence entière, est, en France, de $57^{\circ}15' = D$; en sorte que le rayon de la Terre exprimé en même mesure, ou $\rho = \frac{180^{\circ}\,D}{\pi}$; $\pi = 3{,}141592$ étant le rapport de la demi-circonférence au rayon. Il est clair que l'on a aussi $\rho = \frac{D}{\text{arc } 1^{\circ}}$, puisque les arcs semblables sont proportionnels à leurs rayons.

Partant,	log. rayon en toises =	6,5141117
ajoutant le logarithme constant.....		0,2898200
on a	log. rayon en mètres =	6,8039317;

résultat qui diffère peu de celui-ci 6,8038801, que l'on trouve en considérant le quart du méridien sphérique de dix millions de mètres.

Réduction d'un angle pris dans un plan à un autre plan incliné à l'horizon.

131. Le centre de l'instrument et le point de mire n'étant pas ordinairement les mêmes dans chaque station, c'est ce qui est, en partie, cause que les trois angles d'un triangle rectiligne diffèrent de deux angles droits. Si donc l'on ramenait au plan des trois centres des stations, les angles observés entre les sommets des signaux, ces angles ainsi corrigés serviraient à faire juger du degré d'exactitude des observations; mais la réduction dont il s'agit pourrait aussi faire connaître l'effet de la réfraction terrestre sur les angles observés.

Soient deux signaux AA', BB' (fig. 19) observés du signal zC. Si C, a', b' sont les centres des stations, et que l'on ait relevé l'angle $ACB = c$; l'angle $a'\,C\,b'$ sera dans le plan des stations, et l'excès de l'angle horizontal sur l'angle observé sera, d'après l'art. 96,

$$x = p^2 \tang \tfrac{1}{2} c - q^2 \cot \tfrac{1}{2} c \qquad (1).$$

L'angle $a'Cb'$ étant très peu différent de ACB, on aura de même

$$x' = p'^2 \tang \tfrac{1}{2} c - q'^2 \cot \tfrac{1}{2} c \qquad (2),$$

x' désignant aussi l'excès de l'angle horizontal sur l'angle $a'Cb'$.

Maintenant il est évident que puisque $ACB + x = a'Cb' + x'$, on a

$$a'Cb' - ACB = x - x';$$

ainsi, les équations (1) et (2) étant soustraites l'une de l'autre, il

viendra, pour l'expression de la différence cherchée,

$$x - x' = (p^2 - p^2) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c - (q^2 - q'^2) \cot \tfrac{1}{2} c \qquad (3).$$

Mais si les angles sous lesquels on voit du point C les hauteurs Aa', Bb' sont représentés par δH, $\delta H'$, les hauteurs angulaires des points de mire A et B au-dessus de l'horizon étant toujours désignées par H, H', on aura, par rapport aux hauteurs des points de station a', b',

$$p' = \tfrac{1}{2}(H + H') - \tfrac{1}{2}(\delta H + \delta H'), \text{ et } q' = \tfrac{1}{2}(H - H') - \tfrac{1}{2}(\delta H - \delta H').$$

D'ailleurs

$$p = \tfrac{1}{2}(H + H'), \quad q = \tfrac{1}{2}(H - H');$$

et si l'on fait attention que

$$p^2 - p'^2 = (p + p')(p - p'), \quad q^2 - q'^2 = (q + q')(q - q');$$

l'équation (3) deviendra, en réduisant en secondes,

$$x - x' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta H + \delta H'}{R''}\right)[H + H' - \tfrac{1}{2}(\delta H + \delta H')] \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c,$$
$$- \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta H - \delta H'}{R''}\right)[H - H' - \tfrac{1}{2}(\delta H - \delta H')] \cot \tfrac{1}{2} c.$$

Cette formule, comme nous l'avons déjà dit, peut servir à évaluer l'effet de la réfraction sur l'angle observé, et cela en y mettant pour δH et $\delta H'$ la valeur de cette réfraction déterminée *à priori* par une méthode que nous exposerons à la fin de ce livre. Nous ne donnerons aucun exemple numérique à ce sujet.

CHAPITRE VI.

De la réduction des angles au centre de la station.

Centres visibles et accessibles.

132. Toutes les fois que l'on observe au centre même de la station, on a immédiatement les angles sous lesquels on voit de ce point les distances qui joignent les extrémités des signaux; mais il arrive souvent que l'instrument ne peut être placé que hors de l'axe du signal pris pour centre de la station : dans ce cas, il est nécessaire d'y réduire les angles observés.

Soit C (fig. 21) le centre de la station, et O celui de l'instrument, ou le sommet de l'angle observé AOB. On demande la mesure de l'angle ACB qui est la réduction du premier.

Faisons les données

$$AOB = O, \quad BOC = y, \quad CO = r, \quad BC = G, \quad AC = D,$$

et l'angle inconnu $ACB = C$.

Puisque l'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux intérieurs opposés, on a, par rapport au triangle IAO,

$$AIB = O + IAO,$$

et par rapport au triangle BIC,

$$AIB = C + CBO.$$

Égalant ces deux valeurs, on obtient

$$C = O + IAO - CBO.$$

D'un autre côté l'on a

$$\sin CAO = \frac{r \sin (O + y)}{D}, \qquad \sin CBO = \frac{r \sin y}{G};$$

mais les angles CAO, CBO étant toujours fort petits, leurs arcs

peuvent être pris pour leurs sinus; donc la réduction en secondes est

$$C - O = \frac{r \sin (O + y)}{D \sin 1''} - \frac{r \sin y}{G \sin 1''} \qquad (1).$$

L'usage de la formule précédente ne peut, dans aucun cas, être embarrassant, pourvu que l'on ait égard aux signes de sin $(O + y)$ et de sin y; ainsi le premier terme de la correction sera positif si l'angle $O + y$ est compris entre o et 200^g, et il deviendra négatif, s'il surpasse 200^g; le contraire aura lieu dans les mêmes circonstances, pour le second terme qui dépend de l'*angle de direction* y.

Il est remarquable que D est la distance de l'objet à droite, et G la distance de l'objet à gauche. Quant à l'angle y, c'est toujours celui sous lequel paraissent le centre de la station et l'objet à gauche; ainsi, quand on a mesuré l'angle AOB, la lunette supérieure est dirigée sur l'objet à gauche B, et l'inférieure sur l'objet à droite A; alors celle-ci restant fixe sur A, si l'on fait mouvoir la lunette supérieure dans le sens de la graduation, jusqu'à ce que son axe réponde au point C, l'arc qu'elle aura parcouru sur le limbe sera la mesure de l'angle y, qui doit toujours se compter suivant l'ordre des divisions de l'instrument, et dont la valeur peut aller depuis o jusqu'à 400^g.

Nous supposons ici que la graduation est numérotée de gauche à droite; mais si elle l'était de droite à gauche, comme sur les cercles allemands, il faudrait changer D en G, et réciproquement, dans la formule (1); parce qu'alors y serait l'angle entre l'objet de droite et le centre de la station. On pourrait aussi, sans opérer ce changement, se borner à prendre pour y son supplément à quatre angles droits, diminué de l'angle O.

La formule (1) se réduit à un seul terme, lorsque l'une des distances D, G est comme infiniment grande par rapport à r; ainsi, selon que A ou B sera le centre d'un astre, on aura simplement

$$C - O = -\frac{r \sin y}{G \sin 1''}, \text{ ou } C - O = \frac{r \sin (O + y)}{D \sin 1''}.$$

De plus, on aurait $C - O = 0$, si A et B étaient deux objets célestes, ou bien si A étant un astre et B un objet terrestre, le centre O du lieu de l'observation était en même tems dans la direction G, *et vice versâ*, auquel cas $y = 0$, ou $y = -O$.

Mais sans supposer infinie aucune distance D, G, on peut encore avoir $C - O = 0$; alors

$$\frac{\sin y}{\sin(O+y)} = \frac{G}{D}:$$

d'un autre côté, dans le triangle ABC, on a

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{\sin(A+C)} = \frac{G}{D};$$

donc, à cause de $C = O$, par hypothèse, on conclut

$$\frac{\sin y}{\sin(C+y)} = \frac{\sin A}{\sin(A+C)};$$

développant les dénominateurs, il vient

$$\frac{\sin y}{\sin C \cos y + \cos C \sin y} = \frac{\sin A}{\sin A \cos C + \cos A \sin C},$$

ou bien

$$\frac{1}{\sin C \cot y + \cos C} = \frac{1}{\cos C + \cot A \sin C};$$

donc

$$\tang y = \tang A = \tang(200^g + A);$$

ce qui signifie que les quatre points A, B, C, O sont sur une même circonférence.

Il suit de là que pour que l'angle réduit soit égal à l'angle observé, il suffit de se placer de manière à ce que $y = A$ ou $= 200^g + A$, c'est-à-dire sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle ABC. Pour éviter tout tâtonnement à cet égard, M. Delambre observe et démontre (page 24, *Déterm. d'un arc du Mérid.*) que l'on peut se placer sur la tangente au cercle ABC, menée par le point C et le plus près de ce point qu'il sera possible, et même à plusieurs mètres sans inconvénient; mais pour cela, il faut connaître l'un des angles A, B, afin de pouvoir déterminer la direction de la tangente.

133. Si plusieurs angles consécutifs O, O', O'', O''' étaient situés dans un même plan, oblique à l'horizon, si l'on veut, on les réduirait tous au centre C, à l'aide du seul angle de direction y et de la distance au centre r : alors, par rapport à l'angle O', l'angle de direction serait;

$$y' = y + O,$$

par rapport à O'',

$$y'' = y' + O' = y + O.$$

par rapport à O''',

$$y''' = y'' + O'' = y + O + O' + O''.$$

L'angle O''' étant censé achever le tour de l'horizon, la réduction qui lui convient doit être égale à la somme de toutes les autres réductions prises avec un signe contraire. Pour le prouver, soient $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ les réductions correspondantes des angles O, O', O'', O'''; on aura

$$C = O + \varepsilon, \quad C' = O' + \varepsilon', \quad C'' = O'' + \varepsilon'', \quad C''' = O''' + \varepsilon''',$$

d'où

$$C + C' + C'' + C''' = O + O' + O'' + O''' + (\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''').$$

Or, par hypothèse, les angles C, C'..., aussi bien que les angles O, O'... font un tour d'horizon; donc l'équation précédente ne peut subsister, à moins qu'on n'ait

$$\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' = 0;$$

donc,

$$\varepsilon''' = -(\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'').$$

Enfin, quand même les plans des angles O', O''... seraient différemment inclinés à l'horizon, les élémens y et r pourront seuls être employés, pourvu que l'angle O soit horizontal; mais avant de faire usage de la méthode actuelle, il faudra réduire à l'horizon les angles O', O''.... Au surplus, quand les objets sont fort près de l'horizon de l'observateur, ainsi qu'il arrive toujours dans les triangulations du premier ordre, il est indifférent de réduire d'abord à l'horizon l'angle observé, ou de le réduire au centre de la station pour le ramener ensuite au plan horizontal.

134. Nous avons déjà indiqué la manière d'obtenir l'angle de direction; cependant il est utile ici de faire connaître plus particulièrement le procédé que l'on suit dans cette circonstance. On détache la lunette supérieure pour la diriger sur le centre de la station, en fixant deux points marqués sur le haut du tube, l'un près de l'oculaire, l'autre près de l'objectif; mais la vis du réticule et celle de la petite pièce cylindrique qui entraîne le verre objectif, ont ordinairement assez de saillie au-dessus du tube, pour servir de points de mire.

Supposons, pour fixer les idées, que cette lunette, au moment du

départ, marque $9751^g,2$, et qu'arrivée dans la direction du centre, après avoir marché de gauche à droite, c'est-à-dire suivant l'ordre des divisions du limbe, elle marque. . . . . $10045^g,32$

Qu'au moyen d'un second mouvement donné à la même lunette, en la ramenant sur le centre de la station, elle réponde à. . . . . 10045 ,28

Qu'après un troisième essai tout semblable, elle marque. . . . . 10045 ,30

Prenant le tiers de la somme de ces trois quantités, on aura. . . . . 10045 ,30

De ce nombre, retranchant celui du point de départ, 9751 ,20

La différence sera l'angle de direction y. . . . . $=294^g,10$.

Il faut bien prendre garde, à chacun de ces essais, que l'instrument ne se dérange : on s'assure qu'il a gardé sa position primitive, lorsque l'axe optique de la lunette est resté dans la direction de l'objet à droite : s'il s'en était écarté, il faudrait l'y ramener en tournant la vis du tambour, et diriger de nouveau la lunette supérieure sur le centre de la station. Quelqu'attention que l'on prenne pour avoir la mesure exacte de l'angle de direction, il reste toujours à cet égard une petite incertitude, mais elle n'est d'ailleurs d'aucune conséquence. Il n'en est pas de même de la mesure de la distance du centre de l'instrument à l'axe du signal : celle-ci doit être prise avec beaucoup de soin, et l'on peut se servir à cet effet d'un cordeau que l'on dirige dans le sens de la lunette supérieure dont l'axe répond au centre de la station.

135. Nous ferons remarquer en outre que si la lunette supérieure était excentrique, il faudrait, à la rigueur, faire une correction à l'angle de direction observé; mais les cercles actuels en dispensent.

Passons maintenant au calcul de la réduction au centre, et pour cela donnons à l'équation (1) la forme

$$\varepsilon = \frac{r}{\sin 1''}\left\{\frac{\sin (O+y)}{D} - \frac{\sin y}{G}\right\},$$

en faisant $\varepsilon = C - O$.

Soit l'angle de position $O = 48^g,756$,
l'angle de direction $y = 294,1$,
la distance au centre $r = 3^m,257$,

la distance à l'objet de droite $D = 17528^m$,
celle à l'objet de gauche $G = 20345$.

1er terme de la correction.			2e terme.
$c.\log \sin 1''$.....	5,80388		
$\log r$.....	0,51282		
	+ 6,31670.	.....	— 6,31670
$\log.\sin(O+y)$ —	9,89310	$\log.\sin y$... —	9,99807
$c.\log D$.....	5,75627	$c.\log G$.....	5,69154
— 92°,483 —	1,96607	+ 101°.465 +	2,00631
première partie.....		— 92 ,483	
réduction		+ 8 ,982	
angle observé.....		48°,7560 ,	
angle réduit au centre.....		48 ,7568 ,982.	

Ce calcul suppose que les distances à l'objet de droite et à celui de gauche sont connues, du moins par approximation. Ces distances peuvent se prendre sur le canevas trigonométrique dressé d'après une échelle, et sur lequel les angles construits à l'aide d'un rapporteur représentent ceux de position; ce qui est suffisamment exact. Mais on évite cette construction préliminaire en résolvant tous les triangles supposés rectilignes, comme si les observations avaient été faites aux sommets mêmes, après avoir toutefois réduit à 200° la somme des trois angles de chaque triangle (art. 100). Ce calcul, dans lequel on peut n'employer que les logarithmes à 5 décimales, s'effectue avec beaucoup de promptitude (*voyez* la résolution des triangles).

La réduction au centre s'obtient aussi à l'aide d'un seul terme; en effet la formule précédente pouvant s'écrire ainsi:

$$C - O = \frac{r.G.\sin(O+y) - r.D.\sin y}{D.G},$$

et le triangle ABC (fig. 21) donnant

$$G = \frac{D.\sin A}{\sin(A+C)},$$

on a, à cause de $O = C$, du moins à peu de chose près,

$$G = \frac{D.\sin A}{\sin(A+O)};$$

et par suite

$$C - O \text{ ou } \epsilon = \frac{r \sin A . \sin (O + y) - r \sin y \sin (A + O)}{D . \sin A},$$

puis développant et réduisant en secondes,

$$\epsilon = \frac{r \sin O . \sin (A - y)}{D . \sin A . \sin 1''}.$$

Quoique cette formule soit moins rigoureuse que celle dont elle dérive, elle est cependant d'une exactitude suffisante. Il faut bien remarquer que le sommet de l'angle A est l'objet à droite. Il est bien rare qu'on se trouve dans la nécessité d'en faire usage.

Centres invisibles des tours à bases circulaires.

136. Lorsqu'on observe au dehors ou au dedans des clochers, des tours, etc., leurs centres sont souvent invisibles ou inaccessibles. Voici les moyens les plus simples pour lever cet obstacle.

Si l'on est placé en O, extérieurement à la tour circulaire TzT' (fig. 22), on mènera les tangentes OT, OT', sur lesquelles on prendra deux distances égales et arbitraires Ox, Ox', de manière cependant que la ligne xx' soit le plus près possible de la tour dont C est le centre : on fera $xm = x'm$, et Om sera évidemment dans la direction de ce centre. On mesurera alors l'angle $COB = y$, et à la distance Oz on ajoutera le rayon Cz pour avoir $CO = r$.

S'il était impossible de mesurer le rayon ou la circonférence du cercle TzT', on mesurerait l'une des tangentes OT, par exemple, et l'on aurait

$$Oz = \frac{\overline{OT}^2}{Oz},$$

puisque toute tangente au cercle est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure. Le reste de l'opération n'a maintenant aucune difficulté.

Il est à propos de remarquer que l'on a plus simplement l'angle y ou $COB = \frac{TOB + T'OB}{2}$; ainsi, l'on fera coïncider d'abord l'axe de la lunette supérieure avec la tangente OT, ensuite avec la tangente OT', et l'on tiendra compte, chaque fois, du nombre de degrés marqué par cette lunette, qui doit toujours marcher dans le sens de la

graduation : on opérera ensuite comme dans l'art. 134, pour trouver chacun des angles TOB, $T'OB$, dont la demi-somme $= y$.

Lorsque l'on sera placé dans l'intérieur d'une tour circulaire, on fera en sorte que le centre de l'instrument soit sur le milieu de la corde qui passe par ce point ; et la perpendiculaire à cette corde sera la direction du centre de la tour. Tous ces procédés sont si simples, qu'il est inutile d'insister sur leur développement.

Centres invisibles des tours à bases polygonales.

137. Si l'on était en dehors de la tour rectangulaire DD' (fig. 23), en O par exemple, et que de ce point l'on pût voir les extrémités de l'une des diagonales DD', dd', on aurait l'angle de direction $COB = y$ par la méthode suivante :

On mènera une droite parallèle à DD', en partageant en parties proportionnelles les côtés OD, OD' du triangle ODD', et le milieu de cette parallèle sera sur la direction OC.

Autrement, on mesurera exactement la droite Op perpendiculaire à dD', ainsi que la partie pm comprise entre Op et la perpendiculaire Cm imaginée abaissée du centre de la tour sur le côté $d'D$. Comme Cm est censé connu, on aura mq par la proportion

$$Cm + Op : pm :: Cm : mq.$$

Ainsi la droite Oq, dont la direction est maintenant déterminée, passera nécessairement par le centre C; on mesurera donc Oq, et l'on aura

$$qC = \sqrt{\overline{Cm}^2 + \overline{mq}^2},$$

et enfin

$$r = Oq + qC.$$

Ainsi, les deux élémens de la réduction de l'angle observé en O seront connus.

Il est visible que ce dernier procédé est général pour tous les polygones réguliers, soit que l'on soit placé dans l'intérieur, soit que l'on se trouve au dehors : toute la difficulté consiste, lorsque le centre est inaccessible, à déterminer l'apothême Cm du polygone qui l'entoure, et c'est ce que la Géométrie enseigne (*voyez* aussi sur cet objet le Mémoire de M. Delambre sur la *détermination d'un arc du méridien*).

Cependant s'il arrivait que l'on ne pût mener la perpendiculaire *Op*, on tirerait la droite *Om*, et l'on éleverait à *Dp* une perpendiculaire vers le milieu de *pm*. La partie de cette perpendiculaire comprise dans le triangle *COm* sera facile à déterminer par la théorie des lignes proportionnelles; on aura donc la direction du rayon *OC*, et ce moyen est aussi général que le précédent.

Il est évident que tout ce qui vient d'être dit relativement aux tours rondes ou polygonales, s'applique mot pour mot aux poutres verticales qui peuvent embarrasser le centre de la station.

Les signaux temporaires, construits comme on l'a dit à l'art. 112, dispensent de cette réduction, qui est presque toujours une source d'erreurs, quand les élémens n'en sont pas bien connus.

CHAPITRE VII.

De la réduction au centre du signal observé, ou de la phase des signaux.

138. Lorsque les signaux sont éclairés obliquement par rapport à l'observateur, et qu'ils ne se terminent pas en pointe, les angles observés ont besoin d'une correction; parce que si le signal *abcd* (fig. 24) a pour base un rectangle, par exemple, et que *ab*, dont la position est connue par rapport aux stations environnantes, en soit la face éclairée, le rayon visuel OA, dirigé exactement sur le milieu de cette face, ne passera pas par le centre M du signal, si ab n'est pas perpendiculaire à AO, et la correction additive ou soustractive sera égale à l'angle AOM.

Or, $$\sin AOM = \frac{AM \sin AMO}{AO};$$

et le triangle obliquangle AOM donnant $AO = \frac{OM \sin AMO}{\sin (AMO + AOM)}$, on a, en substituant et développant,

$$\tang AOM = \frac{\frac{AM}{OM} \sin AMO}{1 - \frac{AM}{OM} \sin AMO} = \tang x;$$

puis réduisant en série (art. 93), il vient

$$x = \left(\frac{AM}{OM}\right) \frac{\sin AMO}{\sin 1''} + \left(\frac{AM}{OM}\right)^2 \frac{\sin 2(AMO)}{\sin 2''} + \text{etc.},$$

ou simplement

$$x = \left(\frac{AM}{OM}\right) \frac{\sin AMO}{\sin 1''},$$

ce qui est toujours suffisant.

Des deux angles BOA, $B'OA$ observés, l'un doit être augmenté de x, l'autre doit en être diminué; cela est évident.

On voit bien à quoi serait égal l'angle $A'OM$, si l'on avait observé la face bd.

Pour plus d'exactitude, il faudrait en outre dégager l'angle AOM d'une très petite correction due à une illusion optique qui résulte de ce que le rayon visuel dirigé du point O sur le milieu apparent de la face ab, ne répond pas toujours exactement à son vrai milieu, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre; mais cette correction peut toujours se négliger, parce qu'elle tombe au-dessous de l'erreur de l'observation, sur-tout quand les côtés des triangles sont fort grands.

139. Quand le signal est une tour ronde dont le centre est de même invisible, la correction est un peu plus longue à calculer, parce qu'il faut avoir recours à l'observation du Soleil.

Soit, dans cette circonstance, CS (fig. 25) le vertical du Soleil, au moment de l'observation, c'est-à-dire l'intersection du plan horizontal AMB avec le plan vertical dans lequel se trouve le centre du Soleil. MS sera l'azimut de cet astre, compté depuis midi. Le demi-cercle ASB sera entièrement éclairé, parce que les deux rayons lumineux qui sont tangens à la circonférence de la tour, peuvent être considérés comme parallèles.

Je fais $MCO = MQ = x$, $MS = z$, et je mène DE perpendiculaire à OC.

Le demi-cercle $DAQE$ est celui qui se présente à l'observateur, supposé fort éloigné de C; mais l'arc AD étant privé de lumière, l'observateur ne verra de bien distinct que la partie $AQME$. J'abaisse AF perpendiculaire à DE; alors EF sera la *projection orthogonale* de l'arc visible, qui paraîtra par conséquent comme la droite FE, et la ligne Oqc sera le rayon visuel que l'observateur dirigera sur le milieu apparent de l'arc visible $AQME$; ainsi l'on aura $Cc = \frac{DF}{2}$.

La ligne FE est plus petite que le diamètre DE, de la quantité $DF = \frac{\overline{AF}^2}{2CD}$; mais $AF = CD.\sin AD$, à cause du triangle rectangle AFC; par conséquent

$$DF = \frac{\overline{CD}^2.\sin^2 AD}{2CD} = \frac{CD.\sin^2 AD}{2} = 2CD \sin^2 \tfrac{1}{2} AD.$$

D'ailleurs, $AD = QS$, comme complément l'un et l'autre de

l'arc AQ; donc

$$DF = 2CD \sin^2 \tfrac{1}{2} QS = 2r \sin^2 \tfrac{1}{2}(x - z);$$

donc

$$Cc = \frac{DF}{2} = r \sin^2 \tfrac{1}{2}(x - z).$$

D'un autre côté, le triangle rectangle OCc donne, en faisant $OC = D$, et $COc = \theta$,

$$\text{tang}\, \theta = \frac{r \sin^2 \frac{1}{2}(x - z)}{D};$$

donc, l'erreur de l'observation réduite en secondes sera

$$\theta = R''.\frac{r \sin^2 \frac{1}{2}(x - z)}{D} \qquad (1).$$

Si le Soleil et l'objet auquel on compare la tour sont du même côté, la correction est additive; s'ils sont de différens côtés, la correction est soustractive; enfin, si $x > z$, le Soleil est à droite de l'observateur : tout cela est évident.

Il ne reste plus, pour calculer la formule précédente, qu'à déterminer $x - z$; en voici le moyen :

On mettra le limbe du cercle dans une situation verticale, et après avoir fixé le mieux possible la lunette supérieure sur le centre du signal, on tiendra compte du nombre de degrés marqué par l'index du cercle azimutal; ensuite, on fera tourner l'instrument sur sa colonne, suivant l'ordre des divisions de ce cercle, pour amener la même lunette dans le vertical du Soleil. L'arc parcouru par l'index sera, dans tous les cas, le supplément à deux angles droits de l'angle $x - z$; car par ce mouvement l'index a décrit l'arc de droite ou de gauche COS', dont le supplément est $QCS = x - z$; et il est visible que la position du Soleil, à l'égard de l'observateur tourné vers le signal, dépend de la grandeur de l'angle COS'; ainsi, pour le cas de la figure, le Soleil est à droite.

Si l'instrument n'a point de cercle azimutal, on le disposera horizontalement, et ensuite on dirigera sur le signal la lunette supérieure dont l'index est arrêté à zéro; on y amènera de même la lunette inférieure. L'instrument étant fixe dans cette position, on dirigera la lunette supérieure dans le vertical du Soleil, au moyen d'un fil-à-plomb placé près de l'objectif, et dont l'ombre devra se projeter sur

la lunette dans le sens de son axe. L'arc parcouru sur le limbe sera l'azimut *COS'* observé entre le Soleil et le signal, ou le supplément à deux droits de l'angle $(x - z)$.

A la rigueur, cet azimut, au commencement de l'observation, n'est pas le même qu'à la fin, parce que le Soleil s'approche ou s'éloigne continuellement du méridien du signal; mais pour un petit intervalle de tems, le mouvement de cet astre peut être considéré comme uniforme. Donc, si l'on prend un milieu entre les deux azimuts dont nous venons de parler, on aura l'azimut pour le milieu de l'observation, et c'est celui qu'il faut employer pour plus d'exactitude.

EXEMPLE.

Supposons l'azimut *COS'* pris avant l'observation. .	=	175°,35'
et pris aussitôt après l'observation	=	175 ,65
L'azimut pour le milieu de l'observation sera	=	175 ,50
dont le supplément à deux droits		200
sera la valeur de l'angle $(x - z)$, ...	=	24 ,50.

Maintenant si, dans la formule (1), on a $r = 4^m,75$, et $D = 18432^m$, on en obtiendra le résultat ainsi qu'il suit :

log R''.....	5,80388
log r.....	0,67669
log. sin $\frac{1}{2}(x - z)$,	9,28157
idem.....	9,28157
c. log. D.....	5,73443
	0,77814 = 6".

L'angle θ, ou la correction à faire à l'angle observé est donc $\pm$ 6". Le choix du signe est certain, d'après ce qui a été dit précédemment.

140. C'est sur-tout les phases des signaux, auxquelles personne avant M. Delambre n'a eu égard, qui produisent de grandes discordances dans les séries relatives à un même angle. Un Mémoire manuscrit qu'a bien voulu me communiquer cet illustre astronome, et qui a pour titre, *Réflexions sur les différentes espèces de signaux*, confirme cette remarque, et fait mention de toutes les différences entre l'angle plus grand et l'angle plus petit parmi ceux obtenus entre

deux objets, dans l'opération de la méridienne. Il est donc bien important de faire un bon choix de signaux, et d'éviter parmi les monumens existans ceux qui, comme le belvéder de Cullan, auquel est dû le grand écart de 19",86 (*Base du Système métrique*, t. I, p. 221), ont la forme d'une pyramide octogone écrasée; car si, à une grande distance, les sommets de ces pyramides deviennent invisibles, le calcul des phases est nécessairement incertain, parce qu'on ignore à quelle hauteur on a visé. Un autre écart de 14",98 se trouve p. 322, entre deux séries, l'une du matin, l'autre du soir, où les signaux étaient éclairés en sens contraires. « Méchain, dit M. Delambre, n'a publié que la moyenne entre les deux séries, et cette » moyenne est confirmée par une autre série observée dans l'ombre. » Ces observations prouvent l'effet considérable des phases ; elles » prouvent en même temps qu'on peut les éluder et les anéantir. » Néanmoins les signaux de réverbères paraissent à cet égard mériter la préférence, quoique ceux qui en ont fait usage aient trouvé des écarts de plus de 4"; aussi M. Laplace a-t-il désiré qu'on les employât pour la mesure de la grande perpendiculaire de Strasbourg à Brest, ainsi que nous l'avons déjà annoncé (art. 112).

CHAPITRE VIII.

De la mesure des bases, des moyens de les ramener à une température unique, et de les réduire au niveau de la mer.

141. La mesure des bases est une des opérations les plus délicates et les plus importantes de la Géodésie, lorsqu'il s'agit de déterminer rigoureusement les côtés d'un réseau trigonométrique. Il est essentiel que les bases soient, sinon les plus longues possible, du moins en rapport avec les côtés des triangles auxquels elles appartiennent; qu'elles soient établies sur un terrain de niveau, ou plutôt que les lignes géodésiques qui les représentent soient situées dans des plans verticaux, et fassent par conséquent partie des grands cercles de la Terre; que leurs longueurs soient déduites d'une unité de mesure parfaitement connue et ramenée au même état de température; car on sait que les métaux, les bois, etc., passent par différens degrés de dilatation lorsque la température de l'atmosphère varie; enfin, il importe que ces bases soient projetées sur une surface unique, telle que celle de la mer.

Les règles qu'on emploie dans la mesure des bases sont de métal, ou de bois, et représentent un multiple de l'unité de mesure, du mètre par exemple; elles doivent être étalonnées avec la plus scrupuleuse attention, c'est-à-dire comparées à cette unité, afin de connaître exactement leurs longueurs. Lenoir, l'un de nos plus habiles artistes, a imaginé pour cet effet un instrument nommé *comparateur;* on en peut voir la description et l'usage dans le 3e volume de la *Base du Système métrique décimal*, p. 447.

Nous venons de faire observer que l'influence du calorique sur les corps, se manifeste par l'augmentation ou la diminution de leurs volumes, et l'on a trouvé que par chaque degré du thermomètre centigrade, le platine se dilate de 0,000008565 dans chacune de ses dimensions, le fer de 0,000010666, et le cuivre jaune de 0,000017843; mais pour l'objet actuel, la dilatation dans le sens de la longueur des règles, est la seule qu'il importe de connaître, afin de pouvoir prendre pour

longueur d'une base celle qui répond à une température unique adoptée pour terme de comparaison.

Supposons, dans la vue de fixer les idées à cet égard, qu'une règle de fer, étalonnée à la température de 10 degrés du thermomètre centigrade, ait été trouvée précisément de même longueur que la règle de platine soumise à la même température, mais ne représentant le mètre qu'au terme de la glace fondante; supposons en outre que l'on ait mesuré avec la règle de fer une longueur K à la température moyenne de 18^c, on saura combien cette longueur contient de mètres, ainsi qu'il suit.

Désignons d'abord par *dilatation absolue*, la dilatation totale qu'une règle de métal, d'une longueur déterminée, acquiert en passant d'une température quelconque à une autre plus haute; désignons de plus, dans les mêmes circonstances, par *dilatation relative*, l'accroissement de longueur évalué en parties de la règle prise pour unité, au terme de la température la plus basse.

Cela posé, si P et F sont les dilatations relatives du platine et du fer, pour chaque degré du thermomètre centigrade, et que x soit le degré de température auquel il faut ramener la règle de fer, afin que sa longueur représente réellement le mètre; on aura, en prenant pour unité de longueur chacune des règles à la température de l'étalonnage,

$$\text{mètre en platine} = 1 - 10P,$$
$$\text{mètre en fer} = 1 - (10 - x)\,F;$$

égalant ces deux valeurs, on tire

$$x = \frac{10\,(F - P)}{F}.$$

Or, en supposant, comme ci-dessus, $F = 0{,}000017843$; . . . . . $P = 0{,}000008565$, on obtiendra

$$x = 5^c{,}1998, \text{ ou simplement } x = 5^c{,}2;$$

c'est la température que doit avoir la règle de fer pour représenter le mètre.

Mais la base K ayant été mesurée à la température moyenne de 18^c, et trouvée par conséquent trop courte, il faut, pour l'exprimer en mètres, la diviser par la longueur de la règle de fer,

ramenée à la température de $5^{\circ},2$, ou, ce qui est de même, tenir compte de l'excès de température de $18^{\circ} - 5^{\circ},2 = 12^{\circ},8$: partant,

$$\text{longueur de la base en mètres} = \frac{K}{1 - 12^{\circ},8\,F} = \frac{K}{1 - 0,0002283904}$$
$$= \frac{K}{0,9997716096}.$$

Donc, une longueur K égale à 10000 fois la règle de fer, vaudrait $K + 12,8\,F.K = 10000^{m} + 2^{m},2839$; d'où l'on voit que la *correction de température* étant ici de $2^{m},2839$, il n'est pas permis de négliger cette correction, quand les bases doivent être mesurées avec une très grande exactitude.

Remarquez qu'il est plus simple d'étalonner une règle d'un métal quelconque sur une autre règle de même matière, parce qu'alors il est inutile de constater le degré de température à laquelle cette opération a eu lieu. Si, par exemple, une barre de fer a été étalonnée sur un mètre de même métal, elle représentera la longueur réelle du mètre à la température de la glace fondante, c'est-à-dire 3 pieds $11^{\text{lig.}},296$ de la toise de l'Académie, prise à 13 degrés du thermomètre de Réaumur.

Les astronomes français qui furent chargés de la grande opération relative à la fixation du mètre définitif, employèrent des règles de platine et de cuivre, formant, par leur superposition, des thermomètres métalliques. Ces règles ne furent point mises en contact, afin d'éviter l'émoussement de leurs extrémités et le recul; mais le petit intervalle qui les séparait fut mesuré avec un languette graduée, comme on le verra bientôt.

Dans les opérations géodésiques ordinaires, on peut, sans inconvénient, mettre les règles ou les perches bout à bout; mais il convient de mesurer deux fois, et en sens contraires, la même base, et de prendre pour vrai résultat la *moyenne* des deux mesures obtenues. A défaut de règles de fer, on se sert, avec avantage, de verges de bois de sapin trempées dans l'huile bouillante, puis garnies d'un vernis épais; parce que, par cette opération, elles sont très peu sensibles aux variations hygrométriques de l'air. La figure 26 représente la forme d'une de ces verges; les branches du losange $ABCD$ et la traverse CD servent d'arcs-boutans à la règle AB, et l'empêchent par conséquent de se courber latéralement. On a au moins deux de

ces verges, qu'on étalonne avec beaucoup de soin, et à chacune desquelles on donne communément 5 mètres de long. Leurs extrémités doivent être très peu épaisses, garnies en fer et à vives arêtes, afin d'obtenir un contact parfait. Le mieux est que ces extrémités soient représentées l'une par un clou à tête ronde, l'autre par un clou à tête plate.

Avant de procéder à la mesure d'une base, on trace un alignement avec la plus grande précision possible, à l'aide de jalons ou perches bien droites garnies par le haut d'un petit carré de carton, et par le bas d'une pointe de fer, afin de pouvoir les ficher en terre. On fait disposer tous ces jalons en ligne droite ou dans un même plan vertical, au moyen d'une lunette placée à une extrémité de la base, et dirigée sur l'autre extrémité. Cette lunette doit se mouvoir dans le sens vertical, à la manière des lunettes des passages, afin de pouvoir l'élever ou l'abaisser selon que le terrain l'exige. Ensuite, on place les règles sur un pont formé de plusieurs madriers calés solidement sur des trépieds ou chevalets : on les aligne avec le plus grand soin, et on les fixe sur le pont au moyen de brides, afin qu'en ôtant la première pour la placer en avant des autres, celles-ci n'éprouvent aucun dérangement. Comme il importe d'observer la température des règles, on leur adapte des thermomètres, mais l'on prend la précaution de les préserver de l'action directe du soleil. Si ces règles, dont on doit soigneusement éviter la flexion, ne pouvaient être disposées horizontalement, l'on mesurerait leur inclinaison à l'aide d'un niveau à perpendicule gradué, comme on le voit (fig. 27); mais en les mettant constamment dans une situation horizontale, ce qui, du reste, fait perdre beaucoup de tems, il arrive alors, à cause des inégalités du terrain ou de son inclinaison, qu'il faut faire faire aux règles des ressauts comme *bc*, *de* (fig. 28). Dans ce cas, l'on fait correspondre exactement l'extrémité postérieure de la règle *cd*, à l'extrémité antérieure *b* de la règle *ab* : or, c'est à quoi l'on parvient à l'aide d'un fil-à-plomb.

Nous terminerons nos remarques à ce sujet, parce que l'ingénieur intelligent saura suppléer à nos omissions, modifier selon les circonstances les moyens d'exécution et les procédés pratiques que nous indiquons, et donner aux divers instrumens à employer dans la mesure des grandes bases, tout le degré de perfection dont ils pourraient être susceptibles.

142. La réduction des règles à l'horizon s'effectue très facilement. En effet, soit l une longueur quelconque, θ son inclinaison, et x sa réduction à l'horizon, ou sa projection horizontale; on aura évidemment

$$x = l \cos \theta.$$

Mais comme θ, qu'il n'est pas nécessaire de connaître très exactement, est toujours un très petit angle, cette formule ne pourrait donner x avec assez de précision (art. 91), il vaut mieux alors calculer le petit excès de l sur x; ainsi on aura, en supposant θ donné en minutes,

$$l - x = l(1 - \cos\theta) = 2l \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{8} l \theta^2 \sin^2 1'.$$

Dans la pratique, l'on met cette formule en table, afin d'abréger considérablement les opérations numériques; et si les observations donnent le double de l'inclinaison θ, on le prend pour argument, ce qui dispense de faire chaque fois une division, et rend le résultat plus sûr. Dans ce cas, la formule se met sous cette forme :

$$l - x = \frac{1}{8} l \sin^2(2\theta).$$

Quant à la différence dn de niveau des extrémités de la longueur l, on voit bien qu'elle est égale à

$$dn = l \sin\theta = l.\theta \sin 1';$$

ainsi, la somme algébrique des dn donnera la différence de niveau des extrémités de la base. Toutefois il ne faut pas considérer cette différence comme étant rigoureusement déterminée par cette méthode; car d'une part, les inclinaisons θ ne sont pas évaluées avec assez de précision, et de l'autre, les dn sont trop peu exactes et par trop multipliées.

En insistant sur la nécessité de faire les extrémités des règles d'une très petite épaisseur, on a pour but d'atténuer les erreurs des contacts, qui ne s'opèrent pas toujours de la même manière, à cause des diverses positions des règles à l'égard de l'horizon : éclaircissons ceci par un exemple. Supposons que ab, bc, de, fg soient quatre règles consécutives mises en contact, la première horizontale, et les trois autres inclinées, comme le représente la figure 29. La lon-

gueur totale de ces quatre règles réduites à l'horizon, sera..... $a'b' + b'c + d'e' + f'g$, tandis que la distance horizontale $a'g$, ou la longueur réellement mesurée, sera plus grande que celle observée, de la somme des intervalles cd', $e'f'$. Or, relativement à cd', l'épaisseur de la deuxième règle est $cd = \epsilon$; si donc θ est l'inclinaison de cette règle, on aura $cd' = \epsilon \sin \theta$. A l'égard de la troisième règle, son épaisseur sera seulement représentée par $ef = \epsilon'$; si donc θ' est son inclinaison, l'on aura $e'f' = \epsilon' \sin \theta'$; ainsi, l'erreur des contacts est

$$\epsilon \sin \theta + \epsilon' \sin \theta';$$

quantité qu'il faudra ajouter aux quatre longueurs des règles réduites à l'horizon, pour avoir la longueur vraiment mesurée; mais cette correction pourra être considérée comme nulle par la précaution indiquée précédemment.

143. Il est sans doute beaucoup plus commode de choisir pour base une ligne droite, ou, pour mieux dire, une ligne exactement située dans un même plan vertical; mais il est des cas où cela est impossible. Les bases de Melun et de Perpignan mesurées par M. Delambre, offrent en effet chacune l'exemple d'une ligne géodésique brisée, dont les extrémités étaient même à quelque distance des deux termes choisis pour centre des stations.

Soit ACB (fig. 30) une ligne brisée; S, V les extrémités de la véritable base, SA et VB des droites respectivement perpendiculaires aux deux arcs sphériques AC, BC mesurés, et C l'angle horizontal que forment ces deux arcs. Le triangle ABC étant réellement sphérique, il faudra, avant de calculer la distance AB pour en déduire ensuite VS, trouver l'excès sphérique de ce triangle (art. 100), retrancher de l'angle C le tiers de cet excès, et faire usage de la méthode de l'art. 92 pour calculer la base AB et les angles CAB, CBA.

Si au contraire on adoptait le procédé de M. Delambre (art. 130), on retrancherait de chacune des deux parties AC, BC de la base brisée, la quantité dont elles surpassent leurs cordes respectives, ainsi que nous allons le faire voir; on réduirait à ces cordes l'angle horizontal, et l'on prendrait pour base véritable la corde qui joint les points A et B, et qui s'obtient par la résolution d'un triangle rectiligne.

En désignant par b le côté d'un triangle sphérique très peu courbe,

pour une sphère dont le rayon $= 1$, et par k la corde correspondante, on aura, par la première des séries de l'art. 91,

$$b - 2\sin\tfrac{1}{2}b = b - k = \frac{b^3}{24}.$$

Lorsque B est la longueur d'un arc, et K celle de sa corde, pour un rayon $= \rho$, on a évidemment

$$b = \frac{B}{\rho};$$

donc,

$$b - k \text{ ou } \varepsilon = \tfrac{1}{24}\frac{B^3}{\rho^3}.$$

Tel est l'excès de l'arc sur sa corde, dans la supposition que b fait partie du rayon pris pour unité; mais cet excès sera donné en même mesure que le rayon de la Terre, en multipliant par ρ la valeur de ε, c'est-à-dire qu'alors

$$B - K \text{ ou } \Sigma = \tfrac{1}{24}\frac{B^3}{\rho^2}.$$

Enfin, l'on aura Σ en secondes, à l'aide de la formule

$$\tfrac{1}{24}R''\frac{B^3}{\rho^2} = \tfrac{1}{24}\frac{B^3}{\rho^2\sin 1''}.$$

L'arc ou la corde AB, ainsi que les angles CAB, CBA étant déterminés par le moyen que l'on vient d'indiquer, on résoudra les petits triangles rectangles SAa, VBb, dans lesquels on connaîtra les angles et les hypoténuses SA, VB; et il ne s'agira plus, pour obtenir SV, que de calculer son excès sur $Va' = ba$: or, dans le triangle rectangle $Sa'V$, on a $\overline{VS}^2 = \overline{Va'}^2 + \overline{Sa'}^2$, d'où

$$VS = Va'\left(1 + \frac{Sa'^2}{Va'^2}\right)^{\frac{1}{2}} = Va'\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{Sa'^2}{Va'^2}\right);$$

donc l'excès cherché, ou

$$VS - Va' = \tfrac{1}{2}\frac{(Sa')^2}{Va'},$$

sans erreur sensible.

144. Voici maintenant comment on réduit une base au niveau de la mer.

Soit ρ (fig. 51) le rayon de la Terre réputée sphérique, pour le niveau de la mer; $\rho + h$ le rayon pour le sol de la base AMB, supposé de niveau; h sera l'élévation Aa du sol au-dessus de la surface des eaux. Soit de plus B la base mesurée AMB, et b la base réduite amb.

Cela posé, puisque les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons, l'on aura

$$\frac{B}{b} = \frac{\rho + h}{\rho};$$

prenant la valeur de b, et ajoutant de part et d'autre $-B$, il viendra

$$B - b = \frac{Bh}{\rho + h} = \frac{\frac{Bh}{\rho}}{\left(1 + \frac{h}{\rho}\right)} = \frac{Bh}{\rho}\left(1 + \frac{h}{\rho}\right)^{-1};$$

puis développant la puissance négative, on aura

$$B - b = \frac{Bh}{\rho} - B\frac{h^2}{\rho^2} + B\frac{h^3}{\rho^3} - \ldots\ldots$$

Tel est l'excès de B sur b. Nous apprendrons au chapitre des différences de niveau à déterminer h.

Tous les côtés des triangles que l'on calculera d'après la base réduite b, seront des arcs de grand cercle d'une même sphère. Si au contraire on prend pour base la corde de l'arc b, ces côtés seront les arêtes mêmes du polyèdre inscrit dans la sphère dont le rayon $= \rho$.

Comme la surface des mers s'élève et s'abaisse chaque jour par l'effet des marées, l'on est convenu de prendre pour niveau *absolu*, celui qui tient le milieu entre la plus haute et la plus basse mer; c'est en effet, à très peu près, ainsi que M. Laplace l'a démontré, la hauteur à laquelle les eaux de l'Océan se trouveraient constamment, sans l'action de la Lune et du Soleil. On suppose alors tous les triangles d'un réseau projetés sur le prolongement de la surface d'une mer tranquille.

Description et usage des règles de platine qui ont servi dans l'opération de la méridienne de France.

145. Les règles de platine, dont nous avons déjà parlé à l'art. 141, sont au nombre de quatre; elles ont 12 pieds de long sur 6 lignes de largeur environ et une ligne d'épaisseur. Chacune est recouverte d'une règle de cuivre qui est de six pouces plus courte que la règle

de platine; l'une et l'autre sont seulement fixées ensemble par une des extrémités, afin que la dilatation des métaux ne se manifeste que du côté de l'autre extrémité qui se trouve libre (*voyez* fig. 32). On apprécie alors à chaque moment l'effet de la température, par la quantité dont le cuivre se dilate plus que le platine : cette quantité ou différence des deux dilatations s'estime à l'aide des divisions *ab* tracées vers l'extrémité de la règle de cuivre, sur une petite pièce de ce métal, entraînée par la règle de platine. Chaque division est $\frac{1}{20000}$ de la longueur de la règle de cuivre, et le vernier *n* donne des parties dix fois plus petites, ou des 200 millièmes de la même longueur. Les divisions se lisent aisément, au moyen des microscopes *L*, *L'*.

La languette *cd* est une petite règle de platine divisée aussi en 20 millièmes de la règle de même métal, assujétie à glisser entre deux rainures du côté du thermomètre métallique; elle sert à mesurer le petit intervalle qu'on laisse entre les règles, lorsque l'on mesure une base, et son vernier est en *n'*. Pour préserver ces règles des accidens qui pourraient survenir dans le transport, et pour les rendre même plus propres à l'usage auquel elles sont destinées, chacune est enchâssée dans une pièce de bois de sapin, de manière à être maintenue constamment en ligne droite. Sur le petit toit *TT'* qui couvre le tout, sont deux pointes de fer *pp'* placées aux extrémités de chaque règle, et que l'on aligne dans la direction de la base, quand on opère. Les toits des règles sont peints de couleurs différentes, pour les distinguer, et sont en outre numérotés.

Les trépieds sur lesquels on pose les règles, ont chacun à leurs angles des vis qui donnent le moyen d'élever ou d'abaisser ces règles, pour pouvoir faire usage des languettes.

L'instrument *ACB* (fig. 33) est une espèce d'équerre composée d'un arc de cercle gradué, et d'une branche de cuivre à laquelle, vers son milieu, est fixé un niveau à bulle d'air *ef*. Cet instrument se place sur chaque règle à la manière des maçons, et lorsque la verticalité de la branche est indiquée par le niveau, on écrit le nombre de degrés que marque la ligne de foi de l'extrémité de cette règle. On retourne ensuite l'instrument, et l'on remet la branche dans la situation verticale; alors l'arc qu'elle a parcouru est le double de l'inclinaison de la règle de platine.

Borda, qui est l'inventeur de ces règles, a reconnu par des expé-

riences très délicates et répétées avec beaucoup de soin, que le thermomètre métallique de la règle n° 1, marque $385^{\text{pari.}},3$ à la température de la glace, et que l'alongement de chaque règle est de $0^{\text{pari.}},9245$ pour une partie des thermomètres. Cela posé, si t' est le terme moyen de toutes les observations du thermomètre métallique de la règle n° 1, faites pendant la mesure de la base,

$$(t' - 385^{p},3) \times 0,9245$$

sera la correction moyenne de température relative à cette règle prise pour *module* au degré de la glace; module que nous désignerons par M.

Les mêmes expériences ont fait connaître que la règle n° 2, exposée à la même température, est plus courte que la première de 0,2, et que son thermomètre marquait alors $383^{p},5$; par conséquent la correction qui convient à cette règle est

$$(t'' - 385,5) \times 0,9245 - 0^{p},2.$$

On a vu aussi que les corrections respectives des règles n° 3 et n° 4, sont dans les mêmes circonstances,

$$(t''' - 380,3).0,9245 - 0^{p},4,$$
$$(t^{\text{iv}} - 384,3).0,9245 - 0,4.$$

Or, en multipliant chacune de ces corrections par le nombre de fois que les règles correspondantes ont été portées sur la base, on aura la correction pour les quatre règles. Mais ce résultat peut se trouver plus simplement; car si t désigne le terme moyen des observations des quatre thermomètres, faites pendant la mesure de la base, auquel cas $t =$ somme des thermomètres divisée par le nombre de fois qu'ils ont été lus, la correction moyenne cherchée sera évidemment

$$(t - 383^{p},8).0,9245 - 0^{p},25 = P.$$

Les parties de cette expression exprimeront des deux cent-millièmes de la longueur fixe M.

Maintenant, soit n le nombre de fois que les règles ont été employées dans la mesure de la base; on aura, pour la correction totale, nP. Mais il faut encore corriger les petites distances d'une règle à l'autre, mesurées par les languettes; et à cet égard, il s'agit de faire séparé-

ment une correction de température à chaque distance observée, et une autre correction des verniers, qui est la même pour toutes les distances. La première correction est toujours additive, si la température est au-dessus de zéro; la seconde s'est trouvée soustractive et $= -0^{p},15$.

La première correction pourrait être donnée au moyen d'une petite table qui aurait pour premier argument les parties de thermomètre métallique observées pendant la mesure, et pour deuxième argument les parties données par les languettes. Si, par exemple, le thermomètre marquait 450^{p}, et la languette n° 1, 2000^{p}; la table de correction de température devrait donner $0^{p},6$. En effet, on sait par ce qui précède, que chaque règle s'alonge de 0,9245 pour une partie de son thermomètre; par conséquent, pour $450 - 585,3 = 64^{p},7$, elle s'alongera de 60^{p}; et puisque la languette marque 2000^{p}, l'alongement relatif à cette longueur sera le quatrième terme de la proportion suivante, dans laquelle le premier terme exprime la longueur de la règle,

$$200000 : 2000 :: 60 : x = 0,6;$$

c'est ainsi que l'on formerait la table dont il s'agit; mais nous verrons plus loin qu'on peut éviter cette table.

Pour concevoir la raison de la seconde correction, il faut remarquer que la ligne de foi du vernier n° 1 ne tombait pas exactement sur le zéro de la division à l'instant du contact des règles, puisqu'alors elle marquait $0^{p},7$; la vraie distance de la règle n° 1 à la suivante doit donc être diminuée de cette quantité, ou ce qui est de même, la correction du vernier n° 1 $= -0^{p},7$. Celles des trois autres verniers étant respectivement $+0,9$; -1; $+0,2$, il s'ensuit que le quart de ces quatre nombres, ou que la correction moyenne des verniers est, comme nous l'avons rapporté, $-0^{p},15$.

Enfin on calculera, pour chaque règle, la correction de l'inclinaison à l'horizon; puis l'on réduira toutes les distances horizontales partielles, au niveau d'une des extrémités de la base, par exemple, et ensuite la longueur totale de cette base au niveau de la mer, comme nous l'avons expliqué plus haut.

Borda fit aussi la comparaison de la toise de l'Académie avec la règle n° 1. Il trouva, en dernière analyse, que cette règle = 2 toises $+ 5^{p},4$, quand son thermomètre marque $386^{p},2$; qu'elle est = 2 toises

— 2ᵖ lorsque le thermomètre marque 413ᵖ,4, et qu'à 16° $\frac{1}{4}$ du thermomètre centigrade, le thermomètre métallique indique 415ᵖ,4.

Il est donc aisé de déduire de là, par une interpolation, qu'à ce même degré de température choisi par Bouguer, pour étalonner les perches dont il fit usage au Pérou, la règle n° 1 = M + 27ᵖ,8 = 2 toises — 2ᵖ,5, et par conséquent que les 2 toises = M + 30ᵖ,3.

Il ne reste plus qu'à trouver le nombre de toises contenues dans une base B exprimée en unités du module M, ou de la règle n° 1 rapportée à la température de la glace. Or, les parties de M étant des 200 millièmes de cette longueur, la double toise du Pérou, prise au degré de chaleur 16° $\frac{1}{4}$, vaut

$$1 + \frac{30,3}{200000},$$

en faisant $M = 1$. Elle sera donc contenue dans la base B un nombre de fois exprimé par

$$\frac{B}{1 + \frac{30,3}{200000}} = \frac{2000000B}{2000303}.$$

C'est à de pareils moyens qu'il faut recourir, pour que les résultats d'une bonne triangulation puissent jeter du jour sur la véritable figure de la Terre.

Postérieurement aux expériences précitées de Borda, une commission de savans fit, en 1799, une nouvelle comparaison de la toise du Pérou avec les 4 règles de platine qui avaient servi pour la mesure des bases de Melun et de Perpignan. Elle reconnut, 1°. que la règle n° 1 était exactement le double de cette toise à la température de 13° de Réaumur; 2°. que le quart de la longueur de 4 règles mises bout à bout, ou que la *règle moyenne* surpassait la règle n° 1, de 0'.0000020; 3°. que le point de la glace à ces mêmes règles, était de 0'.00383.3; 4°. que 10 degrés du thermomètre de Réaumur valaient 23ᵖ,16 du thermomètre métallique; 5°. enfin, que la correction moyenne du vernier des languettes était —0'.00000.3644. Nous ferons bientôt usage de ces résultats.

En 1784, pour mesurer la base de Honslowheath, des savans anglais employèrent avec beaucoup de succès des tubes de verre, dont la dilatation est moindre que celle de l'acier, du fer fondu, et de toute espèce de cuivre. Les expériences qui furent faites à ce sujet, firent

même connaître qu'une verge massive de verre est plus dilatable qu'un tube de même matière. Mais ensuite ces savans jugèrent à propos de mesurer une base de vérification avec une chaîne d'acier parfaitement bien construite, aussi exacte et plus solide que les tubes de verre. Les deux bases, situées à 60 milles de distance l'une de l'autre, ayant été liées par un réseau de 24 triangles, il ne se trouva que 4 pouces $\frac{1}{2}$ de différence entre la mesure directe de l'une d'elles et le résultat du calcul. Néanmoins, jusqu'à présent, rien ne surpasse en exactitude les opérations géodésiques qui ont servi de fondement à notre système métrique.

CHAPITRE IX.

Application de la théorie précédente au calcul des bases.

PREMIER EXEMPLE.

146. Nous choisirons pour premier exemple, la base dite de la *Goldalch*, mesurée en Bavière par les ingénieurs-géographes français, parce qu'elle est susceptible d'un grand nombre de réductions.

Pour mesurer cette base, l'on fit usage de 5 règles de bois de sapin, qui avaient chacune 5 mètres, et qui étaient construites comme nous l'avons dit précédemment. Ces règles, mises bout à bout et en ligne droite, composaient une longueur appelée *portée*. Chaque portée, placée sur des poutrelles soutenues par des chevalets, fut mise de niveau, afin d'éviter la réduction à l'horizon, et de pouvoir mettre plus intimement les règles en contact. On observa la température de chacune de ces règles avant de les changer de place, et l'on considéra la moyenne des cinq températures, comme la température de la portée que représentait ce système de règles. Enfin, après avoir procédé de la sorte, en allant d'une extrémité de la base à l'autre, on trouva $866^{\text{portées}}, \frac{1486}{10000}$ dans la longueur de cette base.

Il restait à étalonner la portée, et à connaître exactement sa dilatation, pour appliquer à la base mesurée la correction de température et l'évaluer en mètres. Or, afin d'atteindre ce but, l'on jugea à propos d'établir sur le terrain un *étalon invariable :* c'était deux pieux implantés en terre, et distans l'un de l'autre d'un peu plus de 25 mètres. Il fallait alors connaître rigoureusement la longueur de cet étalon, c'est-à-dire la distance fixe des centres des pieux, et ensuite comparer cette longueur à celle de la portée. On employa à cet effet un mètre provisoire en cuivre qui représentait exactement, à la température de 10 grades, 3 pieds 11 lignes $\frac{44}{100}$ de la toise du Pérou prise à la température de 13° de Réaumur, ou de $16^{\text{c}},25$. Mais pour mesurer l'excès de l'étalon sur la portée, l'on se servit d'un autre mètre en cuivre, divisé en millimètres, et auquel on avait adapté un ver-

nier (art. 113). Ce mètre auxiliaire fut trouvé un peu plus court que le mètre provisoire, dans le rapport de 30000 à 30014.

Voici maintenant les principaux résultats des expériences dont il s'agit.

Expériences relatives à la longueur E de l'étalon.

A la tempér. de $9^{c},375 = t$, on a trouvé $E = 25^{m.p} + 0,08775 = 25 + \varepsilon$,
$16,875 = t'$ ..... $E = 25 + 0,08390 = 25 + \varepsilon'$,
$26,250 = t''$ ..... $E = 25 + 0,07888 = 25 + \varepsilon''$.

Remarquez que les unités représentent des mètres provisoires, aux températures t, t', t'', et les fractions $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, des parties du mètre auxiliaire : ces parties doivent donc être multipliées par le rapport $\frac{30000}{30014}$, puisqu'elles sont trop grandes.

Expériences relatives à l'excès ϖ de l'étalon sur la portée.

A la température de $9^{c},375 = t$, on a trouvé $\varpi = 0,09232$,
$26,250 = t''$..... $\varpi'' = 0,09032$.

Ces valeurs sont de même des fractions de mètre auxiliaire; il est donc nécessaire de les multiplier aussi par le rapport $\frac{30000}{30014}$, pour les évaluer en parties du mètre provisoire.

Soit $E_{(10)}$ la longueur de l'étalon invariable, exprimée en mètres provisoires à 10 grades de température, d la dilatation relative du cuivre, pour chaque degré du thermomètre centigrade; et, comme ci-dessus, t la température observée, ε l'excès de l'étalon sur 25 fois la longueur du mètre, enfin k le rapport $\frac{30000}{30014}$: il est évident qu'on aura, en vertu des trois premières expériences,

$$E_{(10)} = [25 + \varepsilon k]\,[1 + d(t - 10)],$$
$$E_{(10)} = [25 + \varepsilon' k]\,[1 + d(t' - 10)],$$
$$E_{(10)} = [25 + \varepsilon'' k]\,[1 + d(t'' - 10)];$$

ou bien faisant, pour abréger,

$$25 + \varepsilon k = A, \qquad t - 10 = B,$$
$$25 + \varepsilon' k = A', \qquad t' - 10 = B',$$
$$25 + \varepsilon'' k = A'', \qquad t'' - 10 = B'',$$

on aura plus simplement

$$E_{(10)} = A\ (1 + dB\ ),$$
$$E_{(10)} = A'\ (1 + dB'),$$
$$E_{(10)} = A''\ (1 + dB'').$$

Ces trois équations ne renfermant que deux inconnues, savoir, $E_{(10)}$ et d : l'une d'elles serait satisfaite par les valeurs de $E_{(10)}$ et d déduites des deux autres, si les observations étaient exemptes d'erreurs; mais comme il n'en est jamais ainsi, l'on pourra, par exemple, combiner ces équations deux à deux, et prendre une moyenne arithmétique entre les différentes valeurs d'une même quantité; de cette manière on trouvera

$$E_{(10)} = 25^{m.p},08741;$$

c'est la longueur de l'étalon en mètres provisoires, à la température de 10 grades. On aura en outre, par un milieu,

$$d = 0,00002092;$$

c'est la dilatation relative de la règle de cuivre, employée dans la mesure de l'étalon.

Maintenant, désignons par Π_0 la longueur de la portée au terme de la glace fondante, mais évaluée en mètres provisoires à 10 grades de température; par Δ sa dilatation absolue par chaque degré du thermomètre centigrade, c'est-à-dire sa dilatation évaluée en fraction de mètre provisoire; on aura, d'après les deux dernières expériences rapportées plus haut, et en désignant toujours par $E_{(10)}$ la longueur de l'étalon

$$E_{(10)} = \Pi_0 + \Delta t + \varpi k\ [1 + d(t - 10)] = \Pi_0 + \Delta t + \varpi k\ (1 + dB),$$
$$E_{(10)} = \Pi_0 + \Delta t'' + \varpi'' k\ [1 + d(t'' - 10)] = \Pi_0 + \Delta t'' + \varpi'' k (1 + dB'').$$

De ces deux équations du premier degré, l'on tirera aisément les valeurs des inconnues Π_0 et Δ : faisant le calcul, on aura

$$\Pi_0 = 24^{m.p},99404, \qquad \Delta = 0^{m.p},00011657.$$

Or, par le tableau des températures des portées, inséré dans le Registre des observations, l'on voit que toutes ces températures sont positives, c'est-à-dire au-dessus de zéro; ainsi, la correction totale à laquelle elles donnent lieu est additive et de $1^{m.p},97734$. Cette correction, comme on le conçoit bien, est l'expression de la somme des

corrections partielles. Si, par exemple, n portées eussent été observées à la même température T, la correction qui leur est relative serait évidemment $nT\Delta$. Mais le nombre de portées contenues dans la base était de 866,1486, par conséquent l'on a

Longueur de la portée..... $\Pi_0 =$		$24^{m.p}$,99404
multipliée par		866 ,1486
produit.....		21648 ,55275
Correction de température.....	+	1 ,97734
Longueur de la base en mètres provisoires, $B' =$		21650 ,53009.

Postérieurement à la mesure de cette base, le mètre, déduit des opérations géodésiques de MM. Delambre et Méchain, fut définitivement fixé à 3 pieds 11 lignes $\frac{296}{1000}$ de la toise du Pérou; le rapport entre le mètre légal et le mètre provisoire étant donc $\frac{443,296}{443,440}$, il est clair qu'il faut multiplier par $\frac{443,440}{443,296}$ la valeur précédente de B' trouvée trop courte; partant l'on a

base exprimée en mètres définitifs ou $B = B' \times \frac{443,440}{443,296} = 21657^m,5630$.

La différence de niveau des extrémités de la base étant très petite, on peut considérer la longueur B comme celle d'un arc de grand cercle terrestre compris entre les verticales de ces mêmes extrémités, et représentant le *sol moyen* de la base. Or, il résulte d'un grand nombre d'observations barométriques, que ce sol est élevé de 486^m au-dessus du niveau de la mer; la réduction de la base à ce niveau, évaluée au moyen de la formule de l'art. 144, sera donc $-1^m,6532$; de là

base réduite au niveau de la mer $= 21655^m,9098$;

c'est cette longueur qu'on emploie immédiatement dans le calcul des triangles, quand on les considère comme sphériques.

Si M. Bonne, qui a dirigé les travaux géodésiques de la Carte de Bavière, en publie un jour le précis, par la voie du Mémorial du Dépôt de la Guerre, il sera possible que l'on trouve ses résultats relatifs à la base précédente, un peu différens des miens, parce que je n'ai voulu ni discuter à fond, ni faire connaître moi-même

toutes ses expériences ; aussi ne doit-on regarder ce qui précède que comme des exemples de calcul propres à guider en pareille circonstance.

On devait mesurer une base de vérification avec des règles de fer, dont l'appareil est assez commode, comme je m'en suis convaincu en mesurant, en 1811, avec ces règles, une petite base dans la plaine du Vésinet, près St.-Germain-en-Laye, dans la vue de déterminer la hauteur de l'aqueduc de Marly au-dessus de la Seine. Mais malgré la précision qu'on obtient par un pareil procédé, elle n'équivaut pas à celle qui résulte de l'emploi des règles de platine dont il a été parlé à l'art. 145. Pour ne laisser rien à désirer à ce sujet, voici un exposé succinct de la mesure de la base de Melun, et des diverses réductions qui y sont relatives.

DEUXIÈME EXEMPLE.

147. M. Delambre, qui fut contraint de mesurer une ligne brisée, le long de la route de Lieursaint à Melun, employa quatre règles de platine de 2 toises chacune, et construites comme nous l'avons dit (art. 145); les toits de ces règles étaient peints de différentes couleurs, afin d'éviter toute méprise. A la fin de chaque journée, et après avoir employé plus de dix-sept fois ces quatre règles, on enfonçait dans la terre un pieu dont la tête était quarrée et recouverte d'une lame de plomb sur laquelle on marquait, par deux traits croisés, le point où tombait le fil-à-plomb abaissé de l'extrémité de la dernière règle.

L'arc de cercle du niveau qui servit pour évaluer l'inclinaison des règles, était de 10 degrés, formant 120 parties, dont chacune valait par conséquent 5 minutes, et le milieu de cet arc était numéroté 60. L'alidade mobile à laquelle était adapté un petit niveau à bulle d'air, portait un vernier donnant la minute. (*Voy.* la fig. 33.)

On jugeait que la règle allait en montant, en allant du premier au deuxième terme de la base, lorsque l'arc était plus petit dans l'observation directe qu'après le retournement (art. 145). En général, l'élévation de la partie de l'avant au-dessus du niveau de la partie de l'arrière, est égale à la moitié de l'excès du second arc θ'' sur le premier θ', c'est-à-dire $\frac{\theta''-\theta'}{2}$. On aura une idée de l'ordre que M. Delambre mit dans ses observations, par le tableau suivant.

N° I.

Nos des règles.	THERMO. métalliq.	LANGUETTES	NIVEAU vers BRIE.	NIVEAU vers MALVOISINE	INCLIN. double.	RÉDUC. à l'horiz.	dN+	dN−
	part.							
1	416.0	409p8	53p2	66p2	13p0	9p0	189	
2	416.5	235.9	81.4	38.0	43.4	101.4	.....	637
3	415.0	346.4	50.4	68.4	18.0	17.3	262	
4	420.4	506.6	72.1	48.1	24.0	30.5	.....	349
1								
2								
3								
4								
.								
.								
.								
48r								−13230
96e	20182p3	25736p1				1481p2	+669	−12561

Dans ce tableau, les parties des thermomètres métalliques et des languettes sont des 100000^{ièmes} d'une toise (art. 145); mais les unités des nombres contenus dans les colonnes dN sont des dix-millièmes de toise.

La colonne intitulée *Réduction à l'horizon*, comprend les nombres qu'il faut ôter de la longueur de chaque règle non compris sa languette, pour la réduire à l'horizon. Cette réduction se calcule au moyen de la formule

$$2 . 2^t \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = 4^t \sin^2 \tfrac{1}{4}(2\theta),$$

dans laquelle θ est l'inclinaison de la règle. On aurait de même, pour la réduction de la languette l,

$$2l \sin^2 \tfrac{1}{4}(2\theta) = \tfrac{1}{2}\, l\, 4^t \sin^2 \tfrac{1}{4}(2\theta).$$

On voit donc que

réduct. de la languette = réduct. de la règle $\times \frac{1}{2}$ *long. de la lang.*

Mais M. Delambre a employé à cet effet la formule suivante, qui est suffisamment exacte, et qui a l'avantage de donner la réduction totale, savoir :

$$\text{réd. des lang.} = \frac{\frac{1}{2}\text{ som. des languettes} \times \text{réd. des règles}}{\text{nombre des règles}}.$$

Le tableau précédent n'offre que les résultats de la première journée, ou de la première page du Registre des observations. Voici un second tableau où se trouvent réunis les résultats de chaque page.

N° II.

PAGES.	NOMBRE des RÈGLES.	SOMME des THERMOMÈTRES.	SOMME des LANGUETTES.	SOMME des réductions A L'HORIZON.	SOMME des différences DE NIVEAU.	
1	48	20182r3	25736r1	14817r2	— 12561	
2	52	.....	.....	1556.1	— 518	
3	52	.....	.....	830.7	.....	+ 6414
4	48	.....	.....	893.1	.....	+ 3714
5	52	.....	.....	431.4	.....	+ 6342
. . . 30						
	1504	6.33488.3	16.55062.8	23458.1	— 56696	+ 111331
31 . . . 61						
	3021r 6042t	12t 75863.8	34t 26068.3	0t 32711.3 178.8	— 7t 2922	+ 14t 6562 — 7.2922
				0t 32890.1		+ 7t 3640

Les règles, comme nous l'avons dit, ont été réduites séparément à l'horizon, ce qui a produit 0t.32711.3

Et les languettes, réduites de même, ont donné . . 178.8

En sorte que la réduction totale à l'horizon est . . 0t.32890.1.

On fit correspondre, à l'aide d'un fil-à-plomb, l'extrémité de la première et de la dernière règle aux deux termes de la base; ainsi, la longueur mesurée doit être augmentée d'une épaisseur de cordonnet évaluée à 0t.00057,8.

On a donc

Longueur mesurée	6042'	
Languettes	34.26068.3	
Epaisseur du fil-à-plomb	+ 0.00057.8	
Réduction des règles à l'horizon.	— 0.32711.3	
Réd. des languettes à l'horizon . .	— 178.8	
Base mesurée .	6075'.93236.3	
Thermomètres		12.75863.8
Somme des dN		7'.364.

Mais la dernière règle, ou la 3021ème, dépassait réellement le terme austral, et l'intervalle réduit à l'horizon fut trouvé de 0'.05492.8, quantité évidemment soustractive.

De plus, les deux parties de la base, dont l'une = 3945', l'autre 2131', formaient un angle horizontal de 179° 10' 47",09 : en le réduisant au plan des cordes (art. 130), on le trouve de 179° 10' 40",91 ; d'où l'on conclut, pour la réduction à la ligne droite (art. 92), — 0'.142371.

Enfin, une petite correction, évaluée à + 0'.00002.78, est résultée de ce que la dernière règle était éloignée du coude où était placé le centre du poteau, de 1 pied 7 pouces 8 lignes.

M. Delambre ayant substitué la corde à l'arc, il faut en outre réduire chacune des parties de la base, à l'aide de cette formule :

$$\text{différence de l'arc à la corde} = -\frac{(\text{arc})^3}{24R^2},$$

dans laquelle R désigne le rayon moyen de la Terre (art. 130). Faisant le calcul, on trouve

Pour la partie 3945'	—	0' 00023.88
Pour la partie 2131	—	3.76
Réduction aux cordes. . .	—	0.00027.64
Correct. du vernier des languettes (art. 145)	—	0.01100.48

C'est-à-dire, la correction moyenne 0.00000.3644 multipliée par le nombre des règles.

Réductions précédentes	1°.	—	0.05492.80
	2°.	—	0.14237.10
	3°.	+	0.00002.78
Somme.		—	0.20855.24
Résultat immédiat.			6075.93236.35
Base corrigée.			6075.72381.11.

Les élémens de la réduction de la base au niveau de la mer sont donnés par ce qui suit.

Le sol du terme austral est élevé au-dessus de la mer, de	36',11
Celui du terme boréal, de.	45,91
Moyenne entre les deux termes	41',00
Le sol au coude est élevé de	42,00.

En regardant l'élévation moyenne entre les deux termes, comme l'élévation moyenne de la base, la réduction calculée par la formule de l'art. 144 serait — 0',07615. En partageant la base en sept arcs différens, M. Delambre a trouvé — 0',07735; c'est ce dernier résultat qu'il a employé. Ainsi,

Base réduite à la ligne droite.	6075',72381
Réduction au niveau de la mer.	— 0,07735
Base au niveau de la mer . . .	6075',64646.

Il s'agit maintenant d'avoir égard à la température des règles. Or, la somme 12,75863.8 des thermomètres métalliques divisée par 3021, nombre des observations ou des règles, donne le quotient 0,00422.30; c'est la température moyenne des règles.

Le point de la glace à ces mêmes règles est. .	0',00383.30
Dix degrés du thermomètre de Réaumur valent	23.16
Par conséquent 3° donnent.	6.948
Ainsi à 13° de Réaumur répondent.	413.408
Mais on a eu.	422.30
La différence est donc. . .	+ 8.9.
L'alongement de la règle de platine, pour une partie du thermomètre métallique, est (art. 145).	0.9245
L'alongement pour 8,9 parties = 0,9245×8,9. .	= 8.228.
Ces parties sont des deux cent-millièmes de la règle; en les multipliant par 3021, nombre des règles, on aura pour la réduction totale à 13° de Réaumur,	0',24857
Avec cette correction, la base.	6075,64646
donnera pour la base réduite à la mer, à 13°, et à une ligne droite.	6075,89503
Différence de la corde à l'arc.	87
Arc de la base. . .	6075,89590.

Cette valeur est donnée en partie d'une toise qui serait égale au huitième des quatre règles.

Le 26 novembre 1798, après avoir mesuré la base de Perpignan, l'excès de cette toise moyenne sur la toise n° 1, était de 0,00000.10; la réduction sera donc 0',00000.1 × 6076 = . . . + 668

6075',89590

Base réduite. . . 6075,90198.

Ou en nombre rond, 6075',9, à cause des petites erreurs inévitables dans l'alignement et l'épaisseur des règles.

Il est évident que par la manière dont on a mesuré la base, chaque règle ou les deux toises formaient à la surface de la terre deux tangentes d'une toise chacune. Or, la somme de toutes ces tangentes ayant été prise pour l'arc correspondant, on a nécessairement commis une erreur; mais cette erreur est-elle sensible? c'est ce qu'il s'agit de savoir.

Soit A un arc terrestre dont le rayon est R; on a, comme l'on sait,

$$A = \text{tang}\, A - \tfrac{1}{3}\,\frac{\text{tang}^3 A}{R^2} + \tfrac{1}{5}\,\frac{\text{tang}^5 A}{R^4} - \text{etc.};$$

série qui donne l'arc A en toises, si la tangente est donnée en unités de cette espèce. Mais, dans la supposition actuelle, tang A = 1'; on a donc simplement

$$\text{tang}\, A - A = \tfrac{1}{3}\,\frac{\text{tang}^3 A}{R^2} = \frac{1}{3R^2}.$$

Cette différence entre la tangente et l'arc doit être multipliée par le nombre de toises contenues dans la base, c'est-à-dire par 6076'; ainsi, à cause de log. R = 6,51406 à très peu près, l'on a 0',00000 00001 89 à retrancher de 6075',90198, pour avoir le véritable arc de la base. Il est donc toujours permis de négliger cette correction.

A la rigueur, cette base étant un arc du sphéroïde terrestre, se trouve douée d'une double courbure, qu'on peut néanmoins considérer comme nulle. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

Le grand Canevas trigonométrique de la nouvelle Carte de France, qui doit être exécuté par le Corps royal des Ingénieurs-Géographes, se rattachera non-seulement aux bases de Melun et de Perpignan mesurées par M. Delambre, mais encore à celle d'Ensisheim, près Colmar, mesurée par M. Henry, ainsi qu'à trois autres pour lesquelles on emploiera pareillement les règles de platine.

CHAPITRE X.

Du calcul des triangles, et de quelques problèmes de Géodésie.

148. PUISQUE les bases mesurées et réduites à une même surface de niveau sont ou peuvent être considérées comme des arcs de grand cercle de la sphère terrestre, et qu'elles sont liées à la chaîne des triangles, de manière à en représenter les côtés principaux, il serait naturel de calculer ces triangles par la voie de la Trigonométrie sphérique; mais leur courbure étant peu sensible, on peut aussi les traiter comme des triangles rectilignes, en faisant toutefois usage du théorème de M. Legendre, démontré à l'art. 100, ou bien substituer à ces triangles sphériques les triangles rectilignes formés par les cordes qui soutendent les côtés. Exposons successivement ces trois manières.

Résolution des triangles géodésiques considérés comme des triangles sphériques.

149. Lorsque les angles de position d'un réseau du premier ordre sont réduits à l'horizon de leurs sommets respectifs et au centre, qu'ils sont corrigés de l'excentricité de la lunette inférieure et des phases des signaux, s'il y a lieu, la somme des trois angles d'un même triangle doit excéder deux angles droits d'une quantité qui, en faisant abstraction de l'erreur totale des observations, est uniquement due à la courbure de la Terre, et est précisément égale à la surface du triangle réduite en secondes (art. 100). Pour résoudre les triangles de cette espèce par la règle des quatre sinus (art 55), il faut d'abord dégager les angles d'un même triangle de l'erreur des observations.

Dans les opérations faites avec beaucoup de soin, il est rare que l'erreur du triangle aille à 4″ sexagésimales; et quand les triangles sont bien conditionnés, cette erreur n'a aucune influence sensible sur les côtés.

Par exemple, choisissons le 43ᵉ triangle de la *Base du Système*

métrique décimal, dans lequel la distance de Lieursaint à Melun est la base mesurée, et cherchons, au moyen de cette base et des trois angles, les deux autre côtés.

Il faut passer préalablement des angles observés aux angles sphériques. Or, on a, tom. I, pag. 524.

NOMS des stations.	ANGLES OBSERVÉS réduits.
Malvoisine	40° 36′ 56″,81
Lieursaint	75.39.29 ,81
Melun	63.43.33 ,79
	180° 0′ 0″,41
Excès sphérique...	+ 0 ,49
Somme des erreurs...	— 0 ,08.

Dans ce tableau, les angles observés réduits sont les angles de position réduits au centre et à l'horizon; leur somme = 180° 0′ 0″, 41 : l'excès sphérique déterminé par la méthode de l'art. 100, ou ainsi qu'il sera expliqué plus particulièrement à l'article suivant, est de 0″,49; l'erreur du triangle est donc — 0″,08. En la répartissant également sur les trois angles, on aura ce nouveau tableau.

NOMS des stations.	ANGLES SPHÉRIQUES.		LOG. SINUS DES ANGLES.
Malvoisine	40° 36′ 56″,84	A	9,81356 99297
Lieursaint	75.39.29 ,83	B	9,98625 01102
Melun	63.43.33 ,82	C	9,95264 12944
	180° 0′ 0″,49		

Faisant usage de la notation de l'art. 54, le côté a sera connu; ainsi, par la règle des quatre sinus, on aura ces deux proportions pour déterminer les deux autres côtés b, c,

$$\sin A : \sin B :: \sin a : \sin b,$$
$$\sin A : \sin C :: \sin a : \sin c.$$

Mais elles supposent que la base a, donnée en mètres, est un arc

de grand cercle réduit en parties de l'unité ou du rayon des Tables. On peut cependant exprimer en mètres le sinus de a, et pour lors $\sin b$ et $\sin c$ seront donnés en pareille mesure. En effet, lorsque le rayon est l'unité, on a

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots\right);$$

mais le rayon de la Terre étant désigné par ρ, l'on a

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6\rho^2} + \frac{x^4}{120\rho^4} - \ldots\right).$$

Sin x sera donc donné en mètres, si l'arc x est lui-même exprimé en unités de cette espèce. De là

$$\begin{aligned}\log \sin x &= \log x + \log\left(1 - \frac{x^2}{6\rho^2}\right),\\ &= \log x - \frac{Mx^2}{6\rho^2},\end{aligned}$$

en négligeant les autres termes de la série, qui sont toujours insensibles dans la pratique de la Géodésie, et représentant par M le module 0,434294.

Si l'on désigne par D le degré moyen et par π la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est 1, on aura $\rho = \frac{180^\circ . D}{\pi}$, et par suite

$$\log \sin x = \log x - \left(\frac{M}{6}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \frac{x^2}{D^2}.$$

M. Delambre, qui le premier a fait usage de ce procédé, et évalué tous les côtés de ses triangles en toises, a supposé $D = 57020^t$.

On a aussi en parties du rayon

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\rho^2} + \ldots;$$

de là

$$(\cos x)^{\frac{1}{3}} = \left(1 - \frac{x^2}{2\rho^2} + \ldots\right)^{\frac{1}{3}},$$

et

$$\tfrac{1}{3}\log \cos x = \log\left(1 - \frac{x^2}{6\rho^2}\right) = -\frac{Mx^2}{6\rho^2};$$

enfin,

$$\log \sin x = \log x + \tfrac{1}{3}\log \cos x.$$

Pour application, soit, comme M. Delambre, $x = 14088^t,2858$;

en convertissant cet arc en secondes, on aura, d'après la valeur de D ci-dessus,

$$\begin{aligned} \log x &= 4{,}14886 \\ \log\ 3600'' &= 3{,}55630 \\ c.\log 57020 &= 5{,}24397 \\ \hline \log x'' &= 2{,}94913, \text{ d'où } x'' = 14'49'',5; \end{aligned}$$

puis, par les Tables de Vlacq, à 10 décimales, on aura

$$\begin{aligned} \log 14088^t{,}2858 \ldots\ldots &= 4{,}14885\ 84218 \\ +\tfrac{1}{3}\log\cos 14'49'',5 \ldots\ldots &= 9{,}99999\ 86539 \\ \hline \text{et enfin,}\quad \log.\sin x \text{ en toises} \ldots &= 4{,}14885\ 70757. \end{aligned}$$

Lorsque le sinus de x est donné en mesures connues, et qu'on veut avoir x de la même manière, on a, par ce qui précède,

$$\log x = \log\sin x - \tfrac{1}{3}\log\cos x.$$

Soit, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} \log\sin x \text{ en toises} &= 4{,}14885\ 70757 \\ -\tfrac{1}{3}\log\cos x &= 9{,}99999\ 86539 \\ \hline \text{de là}\qquad \log x &= 4{,}14885\ 84218. \end{aligned}$$

La valeur de x, ou plutôt de a, dans le 43ᵉ triangle que nous prenons pour exemple, est, en arc, $6075^t{,}9001$, dont le log.sin $= 3{,}78361\ 03721$; ainsi, les deux proportions précédentes donneront

$$\begin{aligned} c.\log\sin A &= 0{,}18643\ 00703 \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}18643\ 00703 \\ \log\sin a &= 3{,}78361\ 03721 \ldots\ldots\ldots\ldots = 3{,}78361\ 03721 \\ \log\sin B &= 9{,}98625\ 01102 \qquad \log\sin C = 9{,}95264\ 12944 \\ \hline \log\sin b &= 3{,}95629\ 05526 \qquad \log\sin c = 3{,}92268\ 17368. \end{aligned}$$

Passant du sinus à l'arc, comme ci-dessus, on a

$$b = 9042^t{,}5539, \qquad c = 8369^t{,}1673.$$

C'est ainsi que M. Delambre a obtenu tous les côtés des triangles de la méridienne; mais il observe que l'on peut très bien s'en tenir aux Tables de Callet, et résoudre dans tous les cas les triangles géodésiques, au moyen des logarithmes à 7 décimales.

Lorsqu'une chaîne est terminée par deux bases, on est dans l'usage d'en calculer chaque moitié avec la base qui en fait partie : alors on prend pour côté de jonction la moyenne arithmétique entre les deux résultats. Mais M. Delambre, pour ne pas laisser accumuler ainsi toute l'erreur sur un côté, aime mieux faire accorder exactement les deux bases, en modifiant tant soit peu les angles des triangles. Cette manière de répartir, tout le long de la chaîne, l'erreur entre une base calculée et mesurée, quoiqu'étant tout-à-fait arbitraire, ne donne lieu cependant qu'à des corrections qui sont bien en deçà des limites des erreurs probables d'observation. M. Laplace, dans l'ouvrage que nous avons déjà cité (art. 110), donne à ce sujet une méthode certaine et toute fondée sur les lois de probabilité.

Résolution des triangles sphériques peu courbes, par la Trigonométrie rectiligne.

150. La méthode par laquelle on ramène, à l'aide du théorème de M. Legendre, la résolution des triangles sphériques à celle des triangles rectilignes, est généralement adoptée à cause de sa simplicité. Ainsi, pour calculer les différens côtés des triangles *ABC*, *BCD*,... (fig. 34) on ôte, de chacun des angles horizontaux de ces triangles, le tiers de l'excès de leur somme sur deux angles droits; après quoi l'on applique successivement à chaque triangle le principe de l'art. 49.

Nous choisirons pour exemple un des triangles du réseau trigonométrique qui a servi, en 1816, d'exercice aux élèves du Corps royal des Ingénieurs-Géographes, savoir : le triangle *Panthéon — Saint-Martin-du-Tertre — Dammartin*. Dans ce triangle, le seul côté de commun avec la méridienne de France est la distance du Panthéon à Saint-Martin, laquelle = 29269^{m},30, réduite en arc et au niveau de la mer. Voici les résultats des observations et des calculs.

NOMS des stations.	ANGLES RÉDUITS.
Dammartin (cath.)	64^{g} 3126^{c}5 = *A*
Panthéon	51.5278,4 = *B*
Saint-Martin.....	84.1598,2 = *C*
Somme.....	200.0003^{c}1.

Les angles réduits, rapportés dans ce tableau, sont ceux de position réduits au centre et à l'horizon (art. 132 et 129); leur somme étant de $200^g\ 0003^s,1$, l'excès sur deux angles droits $= 3^s,1$.

Désignant par A', B', C' les *angles moyens*, ou les angles A, B, C diminués chacun du tiers de cet excès, on aura

	Angles moyens.	Log sinus.
$A' =$	$64^g\ 3125^s$	9,9278567
$B' =$	51.5278	9,8596612
$C' =$	84.1597	9,9864152
	200.	

Cela posé, le triangle A, B, C supposé rectiligne, donnera, en adoptant la notation de l'art. 100,

$$\sin A' : \sin B' :: a : b,$$
$$\sin A' : \sin C' :: a : c;$$

les côtés b et c, c'est-à-dire *Dammartin - St.-Martin*, et *Panthéon-Dammartin* seront donc connus. Opérant par logarithmes, on a

$$\begin{aligned} c \log \sin A' &= 0{,}0721433 \\ \log\ a &= 4{,}4664126 \\ \log \sin B' &= 9{,}8596612 \\ \log\ b &= 4{,}3982171 = 25016^m{,}0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \log \sin A' &= 0{,}0721433 \\ \log\ a &= 4{,}4664126 \\ \log \sin\ C' &= 9{,}9864152 \\ \log c &= 4{,}5249711 = 33494^m{,}30. \end{aligned}$$

Il est utile, dans la pratique, de mettre de l'ordre dans les calculs de cette espèce, et de les abréger autant que possible. Voici comment les Ingénieurs-Géographes les disposent dans leurs registres.

NOMS des STATIONS.	ANGLES RÉDUITS.	ANGLES SPHÉRIQUES.	ANGLES MOYENS.	LOG SINUS.	CALCUL des CÔTÉS.	COTÉS en MÈTRES.
Dammartin (cath.)	64°3126",5	27",3	64°3125	9,9278567	4,4664126 0,0721433 9,8596612	29269m,30
Panthéon.....	51,5278 ,4	79 ,2	51,5278	9,8596612	4,3982171	25016,00
					4,5385559 9,9864152	
St.-Martin (clocher)	84,15.98,2	99 ,1	84,1597	9,9864152	4,5249711	33494,30
	200,0003",1	200.0005 ,6	200,0000			
Excès sphérique....	5 ,6					
Somme des erreurs..	— 2 ,5					

Dans ce tableau, les mètres qui sont sur la même ligne qu'un angle, expriment la longueur du côté opposé à cet angle, et ainsi des autres. La première longueur est toujours la base ou le côté connu.

Si le triangle ABC (fig. 34) représentait celui qu'on vient de calculer et qu'il fût le premier du réseau, le second triangle BCD aurait évidemment pour base le côté BC, et se calculerait de la même manière que le premier triangle. En allant ainsi de proche en proche, on arriverait au dernier côté KL du réseau.

151. Pour obtenir les angles sphériques dont on a déjà vu l'usage dans l'article précédent, il faut connaître l'excès sphérique de chaque triangle; d'ailleurs cet excès met à même d'apprécier la somme des erreurs des observations. On le détermine ainsi qu'il suit.

Par l'art. 100, l'excès sphérique $\varepsilon = \frac{sR''}{\rho^2}$, s dénotant l'aire du triangle que l'on considère, ρ le rayon de la Terre, et $R'' = \frac{1}{\sin 1''}$ le nombre de secondes contenues dans le rayon. Or, on a ..... $s = \frac{ab \sin C}{2}$, et, par ce qui précède,

$$C = 84^g,1598\ ,$$
$$\log a = 4,46641,$$
$$\log b = 4,39822;$$

mais avant d'évaluer ε, nous remarquerons que $\frac{R''}{\rho^2}$ est une quantité

constante, dans laquelle ρ et R doivent être exprimés par les mêmes unités qui ont été choisies pour la mesure des côtés et des angles des triangles. Ainsi, pour avoir le logarithme de l'excès sphérique ε exprimé en secondes, au logarithme de l'aire du triangle on ajoutera la quantité

$$\log R - 2\log \rho.$$

Si l'on part des anciennes mesures et de la division du cercle en 360°, on aura

$$\log \rho = 6{,}51406 \qquad \log R'' = 5{,}31443,$$
$$\log R - 2\log \rho = 2{,}28630.$$

Si l'on fait usage des nouvelles mesures et de la division du cercle en 400^g,

$$\log \rho = 6{,}80388, \qquad \log R^s = 5{,}80388,$$
$$\log R - 2\log \rho = 2{,}19612.$$

Enfin, si les côtés du triangle sont exprimés en mètres, et qu'on emploie la division du cercle en 360°, on aura

$$\log R - 2\log \rho = 1{,}70667.$$

La valeur ci-dessus de s étant calculée par les logarithmes, on aura, en vertu des données précédentes,

$$\begin{aligned}
\log \tfrac{1}{2}, \text{ ou } 0{,}5 &= 9{,}69897 \\
\log \sin C &= 9{,}98642 \\
\log a &= 4{,}46641 \\
\log b &= 4{,}39822 \\
\hline
\log s &= 8{,}55002 \\
\log \text{constant} &= 2{,}19612 \\
\hline
\log \varepsilon &= 0{,}74614 = 5'',57;
\end{aligned}$$

l'excès sphérique est donc tel que l'indique le tableau ci-dessus. Or, la somme des trois angles observés étant de 200^g,0003,1, l'erreur totale est de 2'',5; c'est la quantité dont il s'en faut que le triangle ne *ferme* exactement. Chacun des angles étant augmenté du tiers de 2'',5, on a les angles sphériques cherchés.

Il arrive souvent, quand le triangle a peu d'étendue, que la somme des erreurs des observations, lorsqu'elle est négative, surpasse, ab-

straction faite du signe, l'excès sphérique propre de ce triangle. Dans ce cas, la somme des trois angles observés est nécessairement moindre que 200^g. Néanmoins, l'on forme les angles sphériques en corrigeant chaque angle du tiers de l'erreur totale, si les observations ont été faites à chacun des sommets, dans des circonstances favorables; c'est en effet la répartition la plus avantageuse, comme M. Laplace vient de le démontrer, dans son savant Mémoire inséré dans la *Connaissance des Tems* pour 1820, et qui fait partie du second Supplément à sa *Théorie des Probabilités*. Cependant si la mesure de tel angle méritait plus de confiance que celle de tel autre, on modifierait cette règle de répartition, de manière à faire supporter à l'angle le plus douteux la plus forte correction.

152. Puisque l'excès sphérique du triangle ABC (fig. 15) est égal à la surface s multipliée par $\frac{R''}{\varrho^2}$, et que cette surface se compose de celle des deux triangles rectangles ABD, CBD, on a, en désignant par s', s'' ces deux triangles partiels,

$$\varepsilon = \frac{s}{\varrho^2} R'' = \frac{s' + s''}{\varrho^2 \sin 1''};$$

mais, d'après l'art. 100,

$$s' = \tfrac{1}{2} c^2 \sin A \cos A, \qquad s'' = \tfrac{1}{2} a^2 \sin C \cos C,$$
$$= \tfrac{1}{4} c^2 \sin 2A, \qquad = \tfrac{1}{4} a^2 \sin 2C;$$

donc,

$$\varepsilon = \frac{c^2}{4} \frac{\sin 2A}{\varrho^2 \sin 1''} + \frac{a^2}{4} \frac{\sin 2C}{\varrho^2 \sin 1''}.$$

Telle est la forme qu'il convient de donner à la valeur de ε, pour calculer une table qui donne l'excès sphérique en deux parties. On entrera dans cette table avec chacun des deux côtés en mètres et l'angle adjacent. Elle est comprise dans le Recueil de nos Tables, sous le n° IV. M. Delambre l'a donnée en toises (*Base du Système métrique décimal*); il a même formé une table à l'aide de laquelle on a tout d'un coup l'excès sphérique. J'en ai calculé une toute pareille en nouvelles mesures; on la trouvera aussi à la fin de cet Ouvrage, sous le n° V : pour s'en servir, on cherche sur la carte des triangles, et au moyen de l'échelle, les nombres de mètres contenus dans leur base et dans leur hauteur, et avec ces deux nombres, pris pour argumens, on entre dans la table comme dans toutes celles

à double entrée. Quoique cette table s'arrête aux nombres 10000 et 50000, on voit bien qu'elle peut servir pour des nombres multiples.

Désignant par b la base, et par h la hauteur d'un triangle, on a évidemment

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\left(\frac{R''}{\rho^2}\right) bh.$$

Veut-on faire usage des anciennes mesures, c'est-à-dire de la toise et de la division du cercle en 360°? dans ce cas,

$$\log \frac{R''}{2\rho^2} = 1{,}98528, \text{ ou bien } \varepsilon = 0'',00000\ 00096\ 66.bh.$$

Veut-on au contraire employer les nouvelles mesures? on a

$$\log \frac{R''}{2\rho^2} = 1{,}89509, \text{ ou bien } \varepsilon = 0'',00000\ 00078\ 54\ bh.$$

Dans l'application de ces formules, il est suffisant d'exprimer les longueurs en unités de mille toises; ainsi, l'on a, en secondes sexagésimales, ou dans la première hypothèse,

$$\varepsilon = 0'',009666bh;$$

et en secondes centésimales, ou dans la seconde hypothèse,

$$\varepsilon = 0'',007854bh.$$

C'est d'après cette dernière valeur que j'ai calculé la table en question.

153. Pour donner une autre application de l'excès sphérique, résolvons le triangle géodésique dans lequel on connaît seulement l'angle C et les deux côtés adjacens a, b, savoir :

$$\begin{aligned} C &= 120^g,2897^c,12, \\ \log a &= 4\ ,6859571, \\ \log b &= 4\ ,5434696. \end{aligned}$$

On trouvera l'excès sphérique de ce triangle de 12",65; le tiers 4",22 étant ôté de l'angle C, on aura l'angle réduit $C' = 120^g,289290$. Il s'agit maintenant de résoudre un triangle rectiligne dans lequel un angle est C', et les deux côtés adjacens sont a et b, comme ci-dessus. Pour cet effet, l'on aura recours à la méthode de l'art. 49, qui donne

lieu au calcul suivant.

$$\begin{aligned} \log a &= 4,6859571 \\ c.\log b &= 5,4565304 \\ \hline \log \operatorname{tang} \varphi &= 0,1424875 \\ \varphi &= 60^g,260945 \\ \tfrac{1}{2} C' &= 60,144645 \\ \hline 100 - \tfrac{1}{2} C' &= 39,855355 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l.tang}\,(\varphi - 50^g) &= 9,2110910 \\ \text{l}\cot \tfrac{1}{2} C &= 9,8591844 \\ \hline \text{l.tang}\,\frac{A' - B'}{2} &= 9,0702754 \\ \frac{A' - B'}{2} &= 7^g,450177 \\ \frac{A' + B'}{2} &= 39,855355 \\ \hline A' &= 47,305532 \\ B' &= 32,405178. \end{aligned}$$

Maintenant le troisième côté c s'obtiendra à l'aide de l'équation

$$c = \frac{a \sin C'}{\sin A'},$$

$$\begin{aligned} \log a &= 4,6859571 \\ \log.\sin C' &= 9,9775601 \\ c.\log \sin A' &= 0,1696973 \\ \hline \log c &= 4,8332145; \end{aligned}$$

et pour preuve de l'opération, on calculera b, comme s'il était inconnu; on aura en effet

$$\begin{aligned} \log a + c.\log \sin A' &= 4,8556544 \\ \text{l.}\sin B' &= 9,6878152 \\ \hline \log b &= 4,5434696; \end{aligned}$$

ce qui est conforme à l'une des données du problème. Il résulte donc de ce calcul, et en ne supposant aucune erreur dans l'observation de l'angle C, que les parties du triangle géodésique proposé, qu'il fallait trouver, sont

$$A = 47^g,305954 = A' + \tfrac{e}{3},$$

$$B = 32,405600 = B' + \tfrac{e}{3},$$

$$\log c = 4,8332145, \text{ ou } c = 68110^m,56.$$

154. On peut toujours employer la méthode de M. Legendre, dans les opérations les plus délicates de la Géodésie, et dans le cas même

où les côtés du triangle seraient d'un degré et demi, et plus. Nous donnerons la preuve de cette assertion, en résolvant le plus grand triangle qui ait encore été mesuré; savoir, celui qui fait partie du prolongement de la méridienne de France sur le territoire espagnol. Ce triangle a pour sommets *Iviza*, *Montgo*, *Desierto* (fig. 35). MM. Biot et Arago trouvèrent, toutes réductions faites, les angles sphériques suivans :

$$\begin{aligned} \text{Angle à Iviza} &= 59^\circ\, 50'\, 53'',18 = I \\ \text{à Montgo} &= 78.\ 4.\ 9,47 = M \\ \text{à Desierto} &= 42.\ 5.36,38 = D \\ \hline \text{Somme} &= 180.\ 0.39,03. \end{aligned}$$

Le côté *Montgo-Iviza* étant de 56559 toises en arc, on peut calculer les deux autres côtés dans deux hypothèses différentes; d'abord en faisant abstraction de sa courbure, ensuite en le traitant comme sphérique.

1re SUPPOSITION. Les angles *moyens* du triangle se trouveront en ôtant 13",01, c'est-à-dire le tiers de l'excès 39",03, de chacun des angles sphériques; ainsi,

$$\begin{aligned} \text{angle à Iviza} &= 59^\circ\, 50'\, 40'',16 = I' \\ \text{à Montgo} &= 78.\ 3.56,47 = M' \\ \text{à Desierto} &= 42.\ 5.23,37 = D' \\ \hline \text{Somme} &= 180.\ 0.\ 0. \end{aligned}$$

De là

$$\begin{aligned} c.\log\sin D' &= 0,1737341 \ldots\ldots\ldots\ldots 0,1737341 \\ \log \overline{MI} &= 4,7525017 \ldots\ldots\ldots\ldots 4,7525017 \\ \log\sin M' &= 9,9905099 \qquad \log\sin I' = 9,9368479 \\ \hline \log \overline{DI} &= 4,9167457 \qquad \log \overline{DM} = 4,8630837 \end{aligned}$$

et par suite, $\overline{DI} = 82555',44 \qquad \overline{DM} = 72959',8.$

L'excès sphérique, s'il n'était pas connu, se trouverait ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} \log \text{ const.} &= 1,98528 \\ \log\sin M &= 9,99051 \\ \log \overline{MI} &= 4,75250 \\ \log \overline{MD} &= 4,86308 \\ \hline \log.\ \text{excès sph.} &= 1,59137 = 39'',03. \end{aligned}$$

2e SUPPOSITION. Le moyen le plus simple pour confirmer les résultats précédens, est de résoudre le triangle par la méthode rigoureuse de l'art. 149. Soit, pour abréger, la base donnée $\overline{MI} = \delta$; on aura, d'après le même article,

$$\log.\sin\delta = \log\delta - \frac{M\delta^3}{6\rho^2};$$

mais

$$\begin{aligned}
\log M &= 9,63778\\
\log\delta &= 4,75250\\
&= 4,75250\\
c.\log 6 &= 9,22185\\
2.\text{comp}\log\rho &= 6,97188\\
\hline
5,33651 &= 0,0000217\\
\log\delta &= 4,7525017\\
\hline
\log\sin\delta &= 4,7524800\\
c.\log.\sin D &= 0,1737038\\
\log.\sin M &= 9,9905155\\
\hline
\log\sin\overline{DI} &= 4,9166993.
\end{aligned}$$

donc,

Passant du sinus à l'arc, on trouve, à cause de

$$\log\delta = \log.\sin\delta + \frac{M\sin^3\delta}{6\rho^2},$$

sans erreur sensible,

$$\frac{M\sin^3\delta}{6\rho^2} = 0,0000462$$

mais $\log\sin\overline{DI} = 4,9166993$

donc $\log\overline{DI} = 4,9167455 = 82555',4.$

Ce résultat ne différant du précédent que de 4 centièmes de toise, et représentant la valeur du plus grand côté du triangle, il est prouvé par le fait, que la méthode de M. Legendre est applicable en toute circonstance : elle convient même à tout triangle géodésique formé par des lignes de plus courte distance, sur un sphéroïde quelconque peu différent d'une sphère, ainsi que ce célèbre géomètre l'a démontré. Cette méthode est donc tout-à-fait indépendante de l'aplatissement de la Terre, et par cela seul, elle nous paraît avoir de l'avantage sur celle que nous allons expliquer.

Résolution des triangles rectilignes formés par des cordes de la sphère terrestre.

155. Lorsqu'au centre de chaque station les angles horizontaux sont réduits aux angles des cordes (art. 130), ces derniers, relatifs à un même triangle, et ajoutés ensemble, devraient donner une somme égale à deux angles droits; mais l'excès ou le déficit, qui représente l'erreur totale des observations, se distribue sur chacun des angles, comme dans la méthode précédente. Quant à la ligne géodésique, prise pour base et réduite au niveau de la mer (art. 144), on la remplace par la distance rectiligne qui joint ses extrémités (art. 143). De cette manière, le premier triangle du réseau auquel cette base appartient, a pour sommets les pieds des signaux projetés suivant la direction de la pesanteur, sur le prolongement de la surface de la mer. En résolvant donc ce triangle rectiligne, et calculant ensuite tous les autres triangles de proche en proche, tous ces triangles représenteront les faces d'un polyèdre inscrit au globe terrestre. Telle est l'une des méthodes qui furent employées par M. Delambre, dans le calcul de la méridienne, comme nous l'avons déjà dit.

Afin de ne laisser rien à désirer à ce sujet, voici un tableau extrait de ceux de la *Base du Système métrique,* tom. I.

	NOMS des stations.	ANGLES observés.	EXCÈS sphérique.	ANGLES sphériques.	ANGLES des cordes.	ANGLES moyens.
43	Malvoisine	40°36′56″81	— 0″13	40° 36′ 56″84	36′ 56″71	36′ 56″68
	Lieursaint	75.39.29,81	— 0,19	75.39.29,83	39.29,64	39.29,67
	Melun	63.43.33,79	— 0,17	63.43.33,82	43.33,65	43.33,65
		180° 0′ 0″41	— 0,49	180. 0. 0,49	0. 0, 0	0. 0, 0
	Som. des erreurs	— 0″08				
44	Montlhéri	55°10′ 0″10	— 0″14	55°10′ 1″18	10′ 1″04	10′ 1″03
	Malvoisine	43.52. 2,31	— 0,12	43.52. 3,39	52. 3,27	52. 3,25
	Torfou	80.57.54,79	— 0,17	80.57.55,86	57.55,69	57.55,72
		179.59.57,20	— 0,43	180. 0. 0,43	0. 0, 0	0. 0, 0
	Som. des erreurs	— 3,23				

La colonne intitulée *angles observés,* contient les angles de position réduits à l'horizon et au centre.

La colonne suivante, qui a pour titre *excès sphérique,* donne pour chaque angle horizontal, l'excès de cet angle sur l'angle des cordes

correspondant; il se calcule par la méthode de l'art. 130, ou plus directement encore au moyen de la Table VI qui a pour argumens la somme $K + K'$ et la différence $K - K'$ des côtés qui comprennent l'angle à réduire. Les trois excès partiels forment l'excès sphérique du triangle, tel qu'il se trouverait directement par la formule de l'art. 151.

La cinquième colonne s'explique d'elle-même.

La sixième colonne comprend les angles des cordes, qui s'obtiennent en ôtant des angles sphériques les excès sphériques correspondans.

Enfin, la dernière colonne donne les angles moyens qui servent pour résoudre les triangles sphériques, par le procédé de l'art. 150.

A l'aide de ce tableau, et de la base de Melun à Lieursaint, réduite à sa corde, on aura les élémens nécessaires pour déterminer tous les côtés du réseau, soit par le procédé actuel, soit par les deux précédens.

La méthode de réduction au plan des cordes a été suivie pendant long-tems au Dépôt de la Guerre; mais maintenant tous les registres géodésiques sont rédigés conformément au principe de l'art. 100, qu'on appliquait comme par instinct, même bien avant que M. Legendre en eût prouvé la légitimité.

Comme nous sommes entrés dans assez de détails sur cette matière, nous nous bornerons à observer que la longueur d'un des côtés les plus éloignés de la base mesurée, doit être le milieu entre tous les résultats qui dériveraient du calcul de différentes chaînes de triangles, auxquelles ce côté serait commun.

156. *Déterminer la position d'un lieu d'où l'on aperçoit trois points donnés sur la carte.*

Si du point D (fig. 34), élevé au-dessus du plan ABC supposé horizontal, on a observé les angles ADB, ADC, ainsi que les distances au zénit des points A, B, C dont on connaît les distances respectives; on réduira à l'horizon les deux premiers angles, afin que le point D puisse être considéré comme le pied de la verticale abaissée du lieu de l'observation sur le plan ABC, et pour lors, avec deux des distances horizontales AD, BD, CD déterminées par le calcul, on fixera la projection de ce lieu; c'est ce que l'on va voir.

Nommons β, γ les réductions à l'horizon des angles observés ADC, ADB. Soient en outre $DA = D$, $DB = D'$, $DC = D''$, angles

$ABD = x$, $ACD = y$, et enfin adoptons, pour le triangle ABC, la notation de l'art. 47.

Cela posé, les triangles ADC, ADB donneront respectivement

$$D = \frac{b \sin y}{\sin \beta}, \quad D = \frac{c \sin x}{\sin \gamma};$$

d'où

$$\frac{b \sin \gamma}{c \sin \beta} = \frac{\sin x}{\sin y},$$

et par suite

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{b \sin \gamma + c \sin \beta}{b \sin \gamma - c \sin \beta}, \text{ ou bien } \frac{\tang \frac{1}{2}(x+y)}{\tang \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{1 + \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}}{1 - \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}}.$$

Or, si par hypothèse on fait

$$\tang z = \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma} \qquad (1),$$

l'expression précédente deviendra

$$\frac{\tang \frac{1}{2}(x+y)}{\tang \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{1 + \tang z}{1 - \tang z} = \tang \left(z + \frac{1^{\circ}}{2}\right);$$

et si pour abréger on fait

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(x-y), \quad S = \tfrac{1}{2}(x+y) = 2^{\circ} - \tfrac{1}{2}(A + \beta + \gamma) \qquad (2),$$

on aura

$$\tang \varepsilon = \frac{\tang \frac{1}{2}(x+y)}{\tang \left(z + \frac{1^{\circ}}{2}\right)} = \cot. \left(z + \frac{1^{\circ}}{2}\right) \tang S.$$

ε étant connu, on aura sur-le-champ

$$x = S + \varepsilon, \qquad y = S - \varepsilon \qquad (3);$$

ε changerait de signe si sa tangente était négative.

Quant aux valeurs de D, D', D'', il est évident qu'elles seront données par les équations

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{b \sin y}{\sin \beta} = \frac{c \sin x}{\sin \gamma} \\ D' &= \frac{c \sin (x + \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{a \sin (y - C)}{\sin (\beta + \gamma)} \\ D'' &= \frac{b \sin (y + \beta)}{\sin \beta} = \frac{a \sin (x - B)}{\sin (\beta + \gamma)} \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

Cette solution, que l'on doit à M. Delambre, n'exige la construction d'aucune figure; elle nous paraît la plus simple et la plus commode de toutes celles que l'on pourrait donner du même problème.

Quoiqu'il soit aisé de se rendre compte des changemens que les formules ci-dessus éprouvent suivant la position du point D à l'égard du triangle ABC, nous ferons cependant les remarques suivantes : 1°. si le point A était dans l'intérieur du triangle BCD, on aurait

$$S = 2^{\text{q}} - \tfrac{1}{2}(4^{\text{q}} - A + \beta + \gamma) = \frac{A - \beta - \gamma}{2},$$

c'est-à-dire qu'il faudrait prendre le complément à 4 angles droits de l'angle A du triangle ABC;

2°. Dans la même circonstance, il faudrait mettre $x + B$ et $y + C$ dans les valeurs de D'' et de D', parce que les angles B, C seraient extérieurs au quadrilatère $DBAC$, au lieu de lui être intérieurs comme dans le premier cas;

3°. Lorsque le point D sera dans l'intérieur du triangle ABC, la somme des angles observés $\beta + \gamma$, surpassera nécessairement deux angles droits;

4°. Si le point D était placé sur la ligne $BC = a$, la somme $\beta + \gamma$ vaudrait précisément deux angles droits, et l'on aurait

$$\sin\beta = \sin\gamma, \qquad \operatorname{tang} z = \frac{c}{b};$$

ε serait la différence des angles connus B, C, et alors

$$x = B, \qquad y = C.$$

Dans le même cas, on aurait

$$D' = \frac{a \sin o}{\sin o}, \qquad D'' = \frac{a \sin o}{\sin o};$$

expressions qui laissent D' et D'' indéterminées; ainsi, ces distances ne pourront être calculées que par les formules

$$D' = \frac{c \sin(B + \gamma)}{\sin\gamma}, \qquad D'' = \frac{b \sin(C + \beta)}{\sin\gamma};$$

5°. Enfin, si $x + y = 2^{\text{q}}$, on a $\sin x = \sin y$, et pour lors l'équation $\frac{b \sin\gamma}{c \sin\beta} = \frac{\sin x}{\sin y}$ se réduit à $\frac{b \sin\gamma}{c \sin\beta} = 1$. Quant à l'équation..... $\frac{x + y}{2} = 2^{\text{q}} - \frac{1}{2}(A + \beta + \gamma)$, elle donne, dans la même circonstance,

$\frac{1}{2}(A+\beta+\gamma)=1^{\text{q}}$, d'où $\beta+\gamma=2^{\text{q}}-A$: propriété qui appartient au quadrilatère inscrit. Ainsi, les quatre points D, A, C, B étant sur une même circonférence, le problème est indéterminé.

Ce problème est non-seulement utile pour trouver les positions des points secondaires d'une carte, et savoir d'avance si l'emplacement d'un signal que l'on se propose d'établir, donnera des triangles assez bien conditionnés, mais encore pour déterminer les distances qui servent d'élémens dans les réductions des angles que l'on aura observés près de ce signal : passons maintenant à son application.

TYPE DU CALCUL.

Supposons que les angles observés en D et réduits à l'horizon soient

$$\begin{aligned} \beta &= 37^{g},6310 \\ \gamma &= 60\ ,2535 \\ \hline \beta+\gamma &= 97\ ,8845, \end{aligned}$$

et que dans le triangle ABC

$$\begin{aligned} A &= 86^{g},3406, \\ \log b &= 4\ ,0211893, \\ \log c &= 4\ ,1702617; \end{aligned}$$

on aura

$A =$	$86^{g},3406$		$\log c =$	$4,1702617$
$\beta+\gamma =$	$97\ ,8845$		$l \sin \beta =$	$9,7460735$
$A+\beta+\gamma =$	$184\ ,2251$		comp. $\log b =$	$5,9788107$
$\frac{1}{2}(A+\beta+\gamma) =$	$92\ ,11255$		comp. $\log \sin \gamma =$	$0,0907911$
$S. \ldots =$	$107\ ,88745$	$\log \operatorname{tang} z =$	$-48^{g},9694$	$=$ $9,9859370$
$\varepsilon. \ldots$	$-8\ ,22976$		50	
$x. \ldots$	$99\ ,65769$	log cot	$98\ ,9694$	$=$ $8,2092227$
$y. \ldots$	$116\ ,11721$		$l.\operatorname{tang} S$	$-$ $0,9047133$
$\beta. \ldots$	$37\ ,63100$	$\log \operatorname{tang} \varepsilon =$	$-8^{g},22976$	$=$ $-$ $9,1139360$
$y+\beta. \ldots$	$153\ ,74821$			
$x. \ldots$	$99\ ,65769$			
$\gamma. \ldots$	$60\ ,25350$			
$x+\gamma. \ldots$	$159\ ,91119.$			

On a marqué du signe — la tangente de ε, parce qu'elle résulte du produit de deux facteurs affectés de signes différens ; en effet, la

tangente d'un angle aigu est positive, et la tangente d'un angle obtus est négative.

Ensuite,

$$\begin{aligned} \log b &= 4{,}0211893 \\ \log \sin y &= 9{,}9859308 \\ c.\log \sin \beta &= 0{,}2539265 \\ \hline \log D &= 4{,}2610466 = 18240{,}92 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log c &= 4{,}1702617 \\ l.\sin x &= 9{,}9999937 \\ c.\log \sin \gamma &= 0{,}0907911 \\ \hline \log D &= 4{,}2610465 = 18240{,}92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log c &= 4{,}1702617 \\ \log \sin (x+\gamma) &= 9{,}7700514 \\ c.\log \sin \gamma &= 0{,}0907911 \\ \hline \log D' &= 4{,}0311042 = 10742{,}47 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log b &= 4{,}0211893 \\ l.\sin (y+\beta) &= 9{,}8223470 \\ c.\log \sin \beta &= 0{,}2539265 \\ \hline \log D'' &= 4{,}0974628 = 12515{,}92 \end{aligned}$$

Il conviendra de calculer D' et D'' par les autres formules (4), ce qui servira de vérification ; et si l'on désire avoir ces distances avec plus d'exactitude, il faudra employer les logarithmes avec 8 décimales.

On détermine encore la position du point D par une construction qui dispense de tout calcul, puisqu'il ne s'agit que de décrire sur AB et AC des arcs respectivement capables des angles observés γ et β : sur quoi, voyez la *Trigonométrie* de M. Legendre, ou celle de M. Lacroix.

157. *Trouver la plus courte distance de deux lieux dont on connaît la longitude et la latitude géographiques.*

1°. On demande la plus courte distance de Paris au cap de Bonne-Espérance ?

D'après la *Connaissance des Tems*, latitude de l'Observatoire royal de Paris = 48° 50′ 14″, complément ou colatitude..... $c = 41°9'46''$

Latitude australe du cap de Bonne-Espérance = 33° 55′ 15″ ; de là, distance au pôle boréal..... $b = 123°55'15''$

Longitude orientale du même point, comptée de Paris..... $A = 16°3'45''$.

Soit donc A le pôle nord, B Paris, C le cap de Bonne-Espérance ; on aura, pour résoudre le triangle sphérique ABC, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, les deux formules de l'art. 76, savoir :

$$\tang \varphi = \tang c \cos A,$$

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos \varphi} \cos (b - \varphi).$$

Opérant par logarithmes, on a

$$\begin{aligned} \log.\text{tang}\, c &= 9{,}9116540 \\ \log.\cos A &= 9{,}9827055 \\ \log.\text{tang}\, \varphi &= 9{,}9243595 \\ \varphi &= 40^\circ\ 2'\ 7''7 \\ b &= 123.55.15 \\ b - \varphi &= 83.53.\ 7{,}3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos c &= 9{,}8767043 \\ c.\log \cos \varphi &= 0{,}1159718 \\ l.\cos (b - \varphi) &= 9{,}0274235 \\ \log \cos a &= 9{,}0200996 \\ a &= 83^\circ 59' 16''8 \end{aligned}$$

Vérifions ce résultat au moyen des deux formules

$$\text{tang}\, \varphi' = \text{tang}\, b \cos A,$$
$$\cos a = \frac{\cos b}{\cos \varphi'} \cos (c - \varphi');$$

$$\begin{aligned} \text{tang}\, b &= 0{,}1723077\ - \\ \cos A &= 9{,}9827055\ + \\ \text{tang}\, \varphi' &= 0{,}1550132\ - \\ \varphi &= -55^\circ\ 0'\ 53''55 \\ c &= 41.\ 9.46 \\ c - \varphi' &= 96.10.39{,}55. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos b &= 9{,}7466706\ - \\ \text{comp.}\cos \varphi' &= 0{,}2415698\ + \\ \cos (c - \varphi') &= 9{,}0318590\ - \\ \cos a &= 9{,}0200994\ + \\ a &= 83^\circ 59' 16'',8 \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant d'évaluer l'arc a en myriamètres; or, le quart du méridien étant de 10 000 000 de mètres, on a $90^\circ = 1000$ myriamètres: et puisque $a = 83^\circ,988$, on trouve proportionnellement que $a = 933\frac{3}{10}$ myriamètres.

2°. On demande la plus courte distance de Bordeaux aux îles Mispalu (*Nouvelle-Guinée*)?

Longitude ouest de Bordeaux, $2^\circ 54' 14''$
Longitude est des îles Mispalu, $129.47.\ 3$
Somme ou différ. des méridiens, $A = 132.41.17$
Latitude nord de Bordeaux, $44^\circ 50' 14''$; colatitude, $c = 45^\circ\ 9'\ 46''$
Latitude sud des îles Mispalu, $0^\circ 19' 15''$; distance au pôle..... $b = 90.19.15$.

Si donc dans le triangle sphérique ABC, B désigne Bordeaux,

C les îles Mispalu, A le pôle nord, on aura, comme ci-dessus,

$$\tang \varphi = \tang c \cos A,$$
$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos \varphi} \cos (b - \varphi);$$

de là

$\tang c =$	0,0024677 +	$\cos c =$	9,8482477
$\cos A =$	9,8312338 —	$c.\cos\varphi =$	0,0829109
$\tang \varphi =$	9,8337015 —	$\cos(b-\varphi) =$	9,7543360 —
$\varphi =$	— 34° 17′ 20″,1	$\cos a =$	9,6854946 —
$b =$	90.19.15	$a =$	— 61° 0′ 20″1
$b - \varphi =$	124.36.35 ,1	supplém. ou $a =$	118.59.39,9.

Cherchons ce résultat directement par la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

1er terme.		2e terme.	
$\log.\cos b =$	7,7481546 —	$\log.\sin b =$	9,9999932
$\log.\cos c =$	9,8482477	$\log.\sin c =$	9,8507153
log 1er terme $=$	7,5964023 —	$\log.\cos A =$	9,8312338
		log 2e terme $=$	9,6819423 —
1er terme $=$	— 0,0039482		
2e terme $=$	— 0,4807753		
$\cos a =$	— 0,4847235	$\log \cos a =$	9,6854941 —.

Ces deux méthodes conduisent donc à la même valeur de a; ainsi, en procédant d'ailleurs comme ci-dessus, on trouve que $a = 118°,9944444 = 1322 \frac{16}{100}$ myriamètres.

158. *Les trois côtés d'un triangle sphérique étant donnés, trouver les angles au moyen des logarithmes à dix décimales.*

Soient f, g, h les côtés donnés, et F, G, H les angles cherchés. Le tableau suivant fait connaître ces trois côtés, avec leurs log-sinus et log-cosinus tirés des Tables de Vlacq.

Cotés donnés.	Log-sinus.	Log-cosinus.
$f =$ 76° 35′ 36″	9,98800 07512	9,36522 78723
$g =$ 50.10.30	9,88536 35668	9,80648 17481
$h =$ 40. 0.10	9,80809 25880	9,88423 62983

Afin de donner un exemple numérique de la méthode de l'art. 105, nous calculerons la formule

$$\cos F = \frac{\cos f - \cos g \cos h}{\sin g \sin h},$$

dans laquelle nous ferons $A = \frac{\cos f}{\cos g \cos h}$, pour lui donner cette forme :

$$\cos F = -\cot g \cot h\,(1 - A).$$

Or, par l'article cité, l'on a

$$\log A = \log a \pm r,$$

$$\log(1 - A) = \log(1 - a) \mp \frac{ar}{1 - a} - \frac{a}{(1 - a)^2} \cdot \frac{\mu r^2}{2} \mp, \text{etc.};$$

arrêtant cette série au terme en r^2, ainsi que cela est permis quand la différence r est très petite; puis supposant que

$$\log(1 - A) = \log(1 - a) \mp R, \text{ et } r' = \frac{r}{1 - a},$$

on aura évidemment

$$R = ar'\left(1 \pm \frac{\mu r'}{2}\right);$$

enfin, prenant de part et d'autre le logarithme vulgaire, il viendra, à cause de $\mu M = 1$,

$$\log R = \log a + \log r' \pm \frac{r'}{2}.$$

TYPE DU CALCUL.

$\log.\cos f =$	9,36522 78723		
$-l.\cos g \cos h =$	9,69071 80464		
différen. $\log A =$	9,67450 98259	valeur approchée $a =$	0,47262
$\log a =$	9,67451 20959	$1 - a =$	0,52738
$r =$	0,00000 22700	$\log A = \log a - r$	
$\log r =$	4,35602 59		
$-\log(1 - a) =$	9,72212 37	$\log(1 - a) =$	9,72212 36559
$\log r' =$	4,63390 22	$R = +$	20343
$\log a =$	9,67451 21	$\log(1 - A) =$	9,72212 56902
$\frac{1}{2} r' =$	— 22	$l.\cot g \cot h =$	9,99726 18916
$\log R =$	4,30841 21	$\log(-\cos F) =$	9,71938 75818.

Cette méthode et cet exemple ont été donnés par M. Legendre, dans la *Connaissance des Tems* de 1819. Des calculs semblables conduiront à

$$\log \cos G = 9{,}86933\ 39724,$$
$$\log \cos H = 9{,}91728\ 60313,$$

et les tables citées fourniront, d'après ces valeurs, les résultats suivans :

$$F = 121^\circ 36' 19'',86390,$$
$$G = 42.15.13\ ,46007,$$
$$H = 34.15.\ 2\ ,77904.$$

On pourrait déterminer le sinus de chacun de ces angles, de F par exemple, en faisant $A = \cos^2 F$, et procédant comme à l'art 107. *Voyez* au surplus le Mémoire de M. Legendre.

Pour donner une nouvelle application de la formule générale d'interpolation rapportée à l'art. 106, je vais chercher l'angle G, dans une table qui donne les sinus et cosinus logarithmiques de minute en minute; or, j'y vois que cet angle, donné par son cosinus, est compris entre $42^\circ 15'$ et $42^\circ 16'$. En s'arrêtant donc à $a = 42^\circ 15'$, et ayant seulement égard aux premières et secondes différences, on a

$$\log \cos G = 9{,}86933\ 39724 = y$$
$$\log \cos 42^\circ 15' = 9{,}86935\ 97165 = A$$
$$y - A = -\ \ 2\ 57441.$$

La même table donne $\delta A = -1147947$, $\delta^2 A = -571$, $h = 60''$; ainsi

$$n = \frac{y - A}{\delta A} = 0{,}224, \qquad \frac{n-1}{2}\,\delta^2 A = 222,$$

et plus exactement,

$$n = \frac{-257441}{-1147725} = 0{,}22431;$$

enfin

$$G = a + nh = 42^\circ 15' + 0{,}22431 \times 60'' = 42^\circ 15' 13'',4586.$$

Si la table était calculée pour des intervalles de $10''$ comme celle de Vlacq, qui a pour titre, *Trigonometria artificialis;* on aurait précisément le résultat ci-dessus.

CHAPITRE XI.

Du tracé et du calcul de la méridienne terrestre, et des perpendiculaires à cette méridienne, etc.

159. En concevant un plan par l'axe de rotation de la Terre, et par le zénit d'un lieu de sa surface, ce plan, prolongé jusqu'aux limites de la sphère céleste, y tracera la circonférence d'un grand cercle qui sera le méridien de ce lieu. Tous les points de la surface de la Terre qui auront leur zénit sur cette circonférence seront sous le même méridien céleste, et formeront le méridien terrestre correspondant. Vu l'immense grandeur du rayon de la sphère étoilée, les verticales de tous ces points peuvent être censées parallèles au plan du méridien céleste : on peut donc définir le méridien terrestre une courbe formée par la jonction des pieds de toutes les verticales parallèles au plan du méridien céleste. Cette courbe s'écarte de ce plan, si la Terre est un sphéroïde irrégulier, et alors elle est à *double courbure;* mais elle est toute entière dans ce plan, si la Terre est un solide de révolution; car toutes les normales à la surface de ce solide rencontrant l'axe de rotation, celles qui passent par les points de la courbe génératrice sont nécessairement dans le plan de cette courbe, et par conséquent dans celui du méridien céleste.

Si, par le moyen d'une lunette dirigée vers le pôle élevé, et dont la propriété est de se mouvoir exactement dans un plan vertical, on place au loin vers le nord et vers le midi deux signaux dans l'axe optique de cet instrument; puis si l'on transporte la lunette à l'un de ces signaux, et qu'on la dirige sur le premier lieu de l'observateur pour faire placer d'autres signaux de la même manière, et ainsi de suite, la ligne menée par tous ces signaux sera la méridienne terrestre, à laquelle on donnera autant d'étendue que le terrain pourra le permettre.

Au lieu de tracer effectivement cette ligne sur la surface de la Terre, on emploie une construction qui fournit le même résultat : voici en quoi elle consiste.

Soit $ABCDE$.... (fig. 34) une chaîne de triangles étendue dans le sens du méridien, et dont les côtés, calculés par la méthode de l'art. 150, sont de très petits arcs du sphéroïde terrestre. Supposons que l'on connaisse par l'observation l'*azimut* ou l'inclinaison du côté AC sur le premier côté AM de la méridienne; alors on trouvera, par la Trigonométrie, le point M où cette courbe rencontre le côté BC. Les points A, B, C étant dans un même plan horizontal, la ligne AM sera de même dans ce plan, et représentera par conséquent une tangente à la surface de la Terre; mais le prolongement MM' de cette ligne se trouvera au-dessus du plan du second triangle horizontal BCD; si donc, sans changer l'angle CMM', on rabat la ligne MM' sur le plan de ce second triangle BCD, en la faisant tourner autour de BC comme axe, le point M' décrira un très petit arc de cercle qui pourra être considéré comme une droite perpendiculaire au plan BCD; ainsi, l'opération se réduit à plier le côté MM' suivant une verticale, et à calculer la distance AM' pour trouver la position du point M'. En pliant ainsi de proche en proche les parties de la méridienne sur les triangles horizontaux correspondans, on aura, à l'aide du calcul, la direction et la longueur de cette méridienne, depuis une extrémité de la chaîne des triangles jusqu'à l'autre.

Nous ferons remarquer à cet égard, que l'on emploie les angles sphériques de chaque triangle, c'est-à-dire les angles horizontaux corrigés chacun du tiers de la quantité dont leur somme diffère de deux angles droits plus l'excès sphérique (art. 151). Ainsi, dans le premier triangle partiel ACM, on connaîtra les deux angles A, C; le premier est l'azimut supposé observé avec une grande précision, et le second est un des angles sphériques du triangle ABC. Au moyen de ces deux angles et du côté AC connu, l'on évaluera, par la méthode de l'article cité, l'excès sphérique ε du triangle ACM, et le troisième angle sphérique M sera $= 200^g + \varepsilon - A - C$; alors, ôtant $\frac{1}{3}\varepsilon$ de chaque angle, leur somme sera réduite à deux angles droits, et l'on pourra, par ce moyen, procéder, comme à l'art. 150, pour déterminer le côté AM et le segment CM, c'est-à-dire que l'on aura ces deux proportions :

$$\sin\left(200^g - A - C + \tfrac{2}{3}\varepsilon\right) : \sin\left(C - \tfrac{1}{3}\varepsilon\right) :: AC : AM,$$
$$\sin\left(200^g - A - C + \tfrac{2}{3}\varepsilon\right) : \sin\left(A - \tfrac{1}{3}\varepsilon\right) :: AC : CM.$$

Si l'on traite de la même manière le triangle ABM dans lequel les angles sphériques A, B seront connus, on obtiendra le segment BM, et, en l'ajoutant à CM, la somme devra être égale à BC déterminé directement.

Il est évident que le second côté MM' de la méridienne se déterminera par un procédé tout pareil, puisque dans le triangle BMM' l'on connaîtra le côté BM et les deux angles adjacens B, M; mais la résolution du triangle ABM' donnerait immédiatement AM'. Pour abréger ainsi le calcul de la méridienne, il faut faire un choix de triangles bien conditionnés (art. 109).

Quant à la partie $M'M''$ qui se trouve extérieure à la chaîne des triangles, on pourra l'obtenir ainsi qu'il suit : on prolongera CD jusques en N, afin de former le triangle MCN dans lequel le côté CM et les angles C, M seront connus, et l'on déterminera, comme ci-dessus, les côtés MN, CN et l'angle sphérique N. Ainsi, dans le quadrilatère sphérique $NDFM''$, l'on connaîtra les trois angles, DNM'' supplément à deux droits de CNM, NDF supplément à deux droits de CDF, et DFM'' supplément à quatre droits de $DFE+EFG+GFH$: on pourra donc résoudre le triangle DNF, c'est-à-dire déterminer, par la méthode exposée à l'art. 153, les angles sphériques DNF, DFN et le côté NF, diagonale du quadrilatère proposé. Il résultera de cette détermination, que dans le triangle NFM'' l'on connaîtra le côté NF et les deux angles adjacens, savoir l'angle $FNM'' = 200^g - CNM - CNF$, et l'angle $NFM'' = DFM'' - DFN$; ainsi l'on pourra calculer les côtés NM'' et FM''; passer de là à la détermination de $M''M^{IV}$ à l'aide du triangle $M''HM^{IV}$ qui offrira pour données le côté $M''H = FH - FM''$ et les angles sphériques adjacens M'', $M^{IV}HM''$; enfin, arriver à l'extrémité M^{VI} de la méridienne.

160. Une ligne tracée ainsi qu'il vient d'être dit, ou déduite des mesures trigonométriques, par le moyen que l'on vient d'indiquer, se nomme *ligne géodésique :* elle a la propriété d'être la plus courte que l'on puisse mener entre ses deux extrémités sur la surface de la Terre, et elle y mesure par conséquent la distance itinéraire des lieux; c'est ce que l'on démontrera plus bas. A la rigueur, cette courbe diffère un peu du méridien terrestre, et c'est un fait dont il est facile de se rendre raison; car pour que la ligne que déterminent les opérations géodésiques coïncidât avec le méridien terrestre, il

faudrait que les verticales des points A, M, M', M'' fussent parallèles au plan du méridien céleste; c'est-à-dire à celui qui passe par la verticale du lieu A et par l'axe du monde; circonstance qui n'a pas lieu lorsque la Terre n'est pas un solide de révolution. Cependant, dans l'état actuel des choses, la différence entre les deux courbes dont il s'agit est si petite, qu'il est inutile d'y avoir égard.

161. Maintenant, si l'on imagine un cercle perpendiculaire au méridien céleste, et passant par la verticale du lieu de l'observateur, il représentera le premier vertical de ce lieu. La suite de tous les points de la surface de la Terre qui auront leur zénit sur la circonférence de ce cercle, formera la perpendiculaire à la méridienne, que l'on tracera absolument comme la méridienne elle-même.

Dans la sphère, les perpendiculaires à la méridienne sont des grands cercles qui se coupent tous sur l'équateur, en deux points diamétralement opposés; mais dans l'ellipsoïde de révolution, et à plus forte raison dans le sphéroïde irrégulier, ces perpendiculaires concourantes sont des courbes à double courbure. En effet, soit A un lieu situé entre le pôle et l'équateur, et ABB' (fig. 36) la perpendiculaire à la méridienne PA; le premier côté AB de cette ligne sera dans le plan AMB déterminé par la verticale AM et par le côté AB. De même le second côté BB' sera dans le plan BNB', BN étant la verticale du point B : or, on verra, au chapitre suivant, que $CM > CN$; la verticale BN sera donc inclinée sur le plan AMB; il en sera de même de la ligne BB' qui représente le prolongement de AB, plié suivant une droite parallèle à BN. On prouverait pareillement que $B'B''$ s'écarte du plan BNB', et ainsi de suite; donc les quatre points A, B', B'', B''' ne sont pas dans un même plan; donc enfin la perpendiculaire à la méridienne est en général une courbe à double courbure.

Quelle que soit la nature du sphéroïde terrestre, les parallèles à l'équateur sont des courbes dont tous les points sont à la même latitude : sur le sphéroïde de révolution, ces courbes sont planes et circulaires.

162. La situation d'un lieu est déterminée, lorsque l'on connaît la perpendiculaire à la méridienne, ou le parallèle sur lequel il se trouve, et sa position sur cette perpendiculaire ou sur ce parallèle.

Donc lorsque tous les triangles qui forment le canevas d'une carte géographique ont été calculés et orientés d'après les principes exposés précédemment, on obtient les positions respectives des sommets de leurs angles, par le moyen de leurs coordonnées ou de leurs distances à la méridienne et à la perpendiculaire du lieu principal. Voici comment on calcule ces distances par la méthode de M. Legendre, et lorsque les sommets des triangles s'écartent peu de la méridienne.

Supposons, comme ci-dessus, que les triangles ABC, BCD (fig. 34) fassent partie d'une chaîne quelconque d'autres triangles dont les côtés soient des arcs de grand cercle d'une sphère ayant pour rayon la distance du niveau de la mer au centre de la Terre, et que l'on connaisse par l'observation l'angle CAX qui mesure l'azimut z du côté AC, ou son inclinaison par rapport à la méridienne AX; on calculera, par la méthode de l'art. 152, l'excès sphérique ε propre au triangle rectangle AcC, et l'on établira ensuite ces deux proportions, pour trouver Ac, Cc,

$$\sin(100^g - \tfrac{1}{3}\varepsilon) : \cos(z - \tfrac{2}{3}\varepsilon) :: AC : Ac = x,$$
$$\sin(100^g - \tfrac{1}{3}\varepsilon) : \sin(z - \tfrac{1}{3}\varepsilon) :: AC : Cc = y.$$

L'azimut de AB est connu immédiatement à cause de..... $BAX = CAB - CAX$; et, si on calcule l'excès sphérique ε' propre au triangle ABM', on aura

$$AM'B = 200^g - M'AB - ABM' + \varepsilon'.$$

Pour déterminer les côtés AM', BM', il faudra, comme nous l'avons déjà dit, ôter de chacun des angles sphériques du triangle ABM' le tiers de ε', et l'on aura ces deux proportions:

$$\sin(200^g - A - B + \tfrac{2}{3}\varepsilon') : \sin(B - \tfrac{1}{3}\varepsilon') :: AB : AM',$$
$$\sin(200^g - A - B + \tfrac{2}{3}\varepsilon') : \sin(A - \tfrac{1}{3}\varepsilon') :: AB : BM',$$

en désignant respectivement par A, B les angles sphériques $M'AB$, ABM'.

On connaîtra donc dans chacun des triangles rectangles AbB, $M'dD$, deux angles et l'hypoténuse, c'est-à-dire tout ce qu'il faut pour déterminer les côtés Ab, bB, et $M'd$, dD. Donc les distances des points B, D à la méridienne AX et à la perpendiculaire AY seront connues.

Traitant de la même manière le triangle ACN ou $M'DN$, pour avoir AN et DN prolongement de CD, et ensuite le triangle DNF, pour connaître le côté NF et les angles DNF, DFN, il sera facile de calculer les coordonnées du point F.

La distance fF et les angles DFN, NFf étant connus, on aura

$$fFP = 200^g - EFD - DFN - NFf;$$

car tous les angles horizontaux autour d'un même point de station valent quatre angles droits : ainsi dans le triangle rectangle fFP on connaîtra deux angles et un côté; on pourra donc calculer l'excès sphérique qui lui convient, l'angle FPf et les côtés fP, FP. Résolvant ensuite le triangle rectangle eEP, on aura de même la position du point E à l'égard de la méridienne AX et de sa perpendiculaire AY, c'est-à-dire les distances Ee, $Ae = AP - eP$. Il est nécessaire, avant tout, de figurer, d'après l'échelle, la chaîne des triangles observés, afin de voir si ceux tels que ACN, eEP, etc., que l'on forme pour faciliter le calcul des distances à la perpendiculaire et à la méridienne, n'ont pas des angles trop obtus ou trop aigus.

Telles sont en peu de mots deux des méthodes de calcul que l'on peut employer pour trouver la longueur d'une ligne géodésique quelconque comprise entre deux points tels que A et X. Mais en considérant la ligne AX comme une méridienne, on voit que l'on détermine en même tems les azimuts d'un grand nombre de côtés de la chaîne; on peut donc vérifier si les azimuts conclus de la série des triangles s'accordent avec ceux qui résultent de l'observation.

Nous exposerons plus tard une méthode analytique beaucoup plus commode que les deux précédentes, et applicable, soit à la détermination d'un arc de méridien, soit à celle d'un arc de parallèle.

163. Afin de donner un exemple du calcul rigoureux des distances à la méridienne et à la perpendiculaire, supposons que A soit le Panthéon, et B Dammartin. Dans ce cas, l'azimut BAX compté du nord sera $z = 51^g,4003$, et le logarithme de la distance AB ou K sera $\log K = 4,5249711$.

Il s'agit d'abord d'évaluer l'excès sphérique du triangle rectangle ABb; or, on a (art. 100)

$$s = \tfrac{1}{2} K^2 \sin z \cos z,$$

s étant l'aire de ce triangle; partant

$$\begin{aligned}
\log \tfrac{1}{s} &= 9,69897 \\
2 \log K &= 9,04994 \\
\sin z &= 9,85883 \\
\cos z &= 9,83972 \\
\hline
\log s &= 8,44746 \\
\text{log.const.} &\quad 2,19612 \\
\hline
\text{log.excès sph. } \epsilon &= 0,64358, \qquad \epsilon = 4'',401 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \tfrac{1}{3}\epsilon = 1,467,
\end{aligned}$$

de là $\quad z - \frac{2}{3}\epsilon = 51^{g},400007, \quad z - \frac{1}{3}\epsilon = 51^{g},400153;$

et à cause de

$$x = \frac{K\cos(z - \frac{2}{3}\epsilon)}{\cos\frac{1}{3}\epsilon} = \frac{K\cos(z - \frac{2}{3}\epsilon)}{1 - \frac{1}{18}\epsilon^2} = K\cos(z - \tfrac{2}{3}\epsilon)\left[1 + \tfrac{1}{18}\epsilon^2 \ldots\right],$$

$$y = \frac{K\sin(z - \frac{1}{3}\epsilon)}{\cos\frac{1}{3}\epsilon} = \frac{K\sin(z - \frac{1}{3}\epsilon)}{1 - \frac{1}{18}\epsilon^2} = K\sin(z - \tfrac{1}{3}\epsilon)\left[1 + \tfrac{1}{18}\epsilon^2 \ldots\right];$$

on aura, en convertissant l'excès sphérique en parties du rayon dans le facteur $[1 + \frac{1}{18}\epsilon^2 \ldots]$, pour satisfaire au principe de l'homogénéité,

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\log K &=& 4,5249711 \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 4,5249711 \\
\text{l.cos}(z - \frac{2}{3}\epsilon) &=& 9,8397211 & \text{l.sin}(z - \frac{1}{3}\epsilon) &=& 9,8588296 \\
\hline
\text{log 1}^{\text{er}}\text{ terme de } x, &=& 4,3646922 & \text{log 1}^{\text{er}}\text{ terme de } y, &=& 4,3838007 \\
\log \frac{1}{18} &=& 8,74473 \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 8,74473 \\
2\log \epsilon &=& 1,28716 \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 1,28716 \\
2\sin 1'' &=& 8,39224 \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 8,39224 \\
\hline
\text{log 2}^{\text{e}}\text{ terme} &=& 2,78882 & \text{log 2}^{\text{e}}\text{ terme} &=& 2,80793 \\
\text{2}^{\text{e}}\text{ terme} &=& 0^{m},0000000615 & \text{2}^{\text{e}}\text{ terme} &=& 0^{m},0000000642.
\end{array}$$

Ces seconds termes sont tout-à-fait insensibles; ainsi en s'en tenant aux premiers, on a

$$x = 23157^{m},53, \quad y = 24199^{m},18.$$

164. Les géographes emploient pour calculer les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, un procédé un peu plus commode et qu'il importe de faire connaître, quoiqu'il ne soit pas aussi

rigoureux que le précédent. Ils mènent par tous les sommets des triangles des parallèles à la méridienne et à la perpendiculaire; par ce moyen, les côtés de ces triangles deviennent les hypoténuses des triangles rectangles qu'ils calculent en partant de l'azimut connu, et sans tenir compte de l'excès sphérique, parce qu'ils considèrent tous les triangles de la chaîne comme décrits sur une surface plane. Par exemple, la résolution des triangles rectangles APM, $AP'M'$ (fig. 37) donnera les coordonnées absolues xy, $x'y'$ des points M, M'. La résolution du triangle $M'M''b$ fera de même connaître les distances relatives bM'', bM'; et comme les coordonnées absolues du point M'' sont $x''y''$, on aura

$$x'' = AP' + bM', \quad y'' = P'M' - bM''.$$

Pareillement, lorsque l'on aura calculé les distances dM'', dM''', on aura, pour coordonnées absolues du point M''',

$$x''' = AP'' + dM'', \quad y'' = P''M'' + dM''',$$

et ainsi du reste.

C'est de cette manière que les distances des lieux de la France à la méridienne et à la perpendiculaire qui passe par l'Observatoire de Paris, ont été calculées par Cassini. Nous ne nous arrêterons pas à montrer comment on détermine les angles aigus des triangles rectangles $M'bM''$, $M''dM'''$...., ou les angles d'inclinaison de leurs hypoténuses par rapport à des parallèles à la méridienne, parce que cette opération ne présente aucune difficulté, dès-lors que l'on connaît l'azimut de départ; mais nous ferons observer que lorsque l'on enregistre les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, il importe d'indiquer le sens dans lequel elles doivent être prises; or, à cet égard, on peut adopter la convention établie dans la théorie des courbes, relativement aux signes; par exemple, admettre que dans la région sud-ouest, limitée par la méridienne et sa perpendiculaire, les coordonnées x, y sont positives. Alors les signes seront donnés par le tableau suivant :

Région sud-ouest..... $+x$, $+y$,
Région nord-ouest..... $-x$, $+y$,
Région nord-est..... $-x$, $-y$,
Région sud-est..... $+x$, $-y$.

Si, dans le calcul des distances à la méridienne et à la perpendiculaire, on désigne par K le côté connu, et par Z son angle d'inclinaison avec le méridien d'une de ses extrémités, compté du sud à l'ouest et depuis zéro jusqu'à 400^g, on aura généralement

$$x = K \cos Z, \quad y = K \sin Z;$$

en sorte qu'en observant la règle des signes de sinus et cosinus (art. 46), on saura de suite à quelle région appartient x et y.

Équations différentielles de la ligne géodésique, déduites du mode de son tracé.

165. Soient, comme ci-dessus, ABC, BCD (fig. 38) deux triangles consécutifs d'un réseau, et $AM = ds$ l'élément ou le premier côté d'une ligne géodésique quelconque, MM' le prolongement de cette ligne. Si l'on prend $MM' = ds$, et qu'on le plie suivant la verticale $M'N$, au second triangle BCD, on aura MN ou ds' égal à ce prolongement, et cela à un infiniment petit près du troisième ordre; car l'angle $MM'N = i$ étant considéré comme un infiniment petit du premier ordre, on a, à cause du triangle rectangle élémentaire $M'NM$,

$$ds' = ds \cos i = ds \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = ds - \frac{i^2 ds}{2},$$

en négligeant les termes d'un ordre supérieur à i^2; mais $\frac{i^2}{2} ds$ est une quantité du troisième ordre; donc $ds' = ds$; donc la propriété d'une ligne géodésique s résulte de ce que sa différentielle ds est constante.

D'un autre côté, la normale

$$M'N = ds \sin i = ds \left(i - \frac{i^3}{2.3}\right) = ids - \frac{i^3}{6} ds,$$

ou simplement $M'N = ids$; donc la normale comprise entre le prolongement du premier côté de la ligne géodésique et la surface terrestre est du second ordre. On remarquera que puisque la ligne géodésique AMN est égale à la distance rectiligne AMM', cette ligne jouit nécessairement de la propriété d'être la plus courte entre toutes celles que l'on peut mener sur la Terre, entre ses extrémités A, N. En effet, $ABM' > AMM' = AMN$; mais..... $ABM' = ABN$ à un infiniment petit près du troisième ordre; donc $ABN > AMN$.

Maintenant, soient x, y, z les coordonnées rectangles de l'origine de l'élément ds, ou du point A du sphéroïde terrestre; celles de l'extrémité M de cet élément seront $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, et les coordonnées du point M', extrémité du second élément $MM'=ds$, seront évidemment

$$x+2dx=X,\quad y+2dy=Y,\quad z+2dz=Z.$$

Mais nous venons de démontrer que la petite normale $M'N$, ou la perpendiculaire au second triangle BCD est du second ordre; par conséquent elle peut être considérée comme la diagonale d'un parallélépipède rectangle dont les côtés seraient du même ordre, c'est-à-dire ddx, ddy, ddz. Ainsi, les coordonnées du point N, ou du pied de cette normale, seront

$$x+2dx-ddx=X',\ y+2dy-ddy=Y',\ z+2dz-ddz=Z'.$$

Or, par la théorie connue des surfaces courbes (*Traité élément. du Calcul différentiel* de M. Lacroix, ou mon *Recueil de propositions de Géométrie*, 2e édit., pag. 394), on a en général, pour les équations des projections de leur normale,

$$X'-X+p\,(Z'-Z)=0,$$
$$Y'-Y+q\,(Z'-Z)=0.$$

$p=\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q=\left(\frac{dz}{dy}\right)$ étant des coefficiens aux différentielles partielles; on a donc, pour le cas dont il s'agit,

$$\left.\begin{aligned} ddx+pddz&=0\\ ddy+qddz&=0\end{aligned}\right\}\qquad (A).$$

D'ailleurs, lorsque $u=f(x,y,z)=0$ désigne généralement l'équation d'une surface courbe, f étant le signe d'une fonction quelconque, son équation différentielle est, comme l'on sait,

$$du=\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dz}\right)dz=0;$$

mais, en supposant aussi l'équation de cette surface représentée par $z=\varphi\,(x,y)$, on a de même, pour son équation différentielle,

$$dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy=pdx+qdy;$$

de là on tire aisément

$$p = -\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{du}\right), \quad q = -\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dz}{du}\right).$$

Enfin, substituant ces valeurs dans les équations (A), il vient

$$\left(\frac{du}{dz}\right) ddx - \left(\frac{du}{dx}\right) ddz = 0,$$
$$\left(\frac{du}{dz}\right) ddy - \left(\frac{du}{dy}\right) ddz = 0.$$

Telles sont les équations de la ligne la plus courte sur une surface courbe quelconque, puisqu'elles résultent de la propriété même de cette ligne. Éliminant entre elles $\left(\frac{du}{dz}\right)$, on a, pour troisième équation de la plus courte distance,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) ddy - \left(\frac{du}{dy}\right) ddx = 0.$$

Ces trois équations seront donc celles d'une ligne géodésique, si $u = 0$ exprime l'équation de la surface terrestre (*voyez* aussi sur ce sujet le *Calcul des Variations*, par M. Lacroix, ou celui de M. Francœur).

166. Pour première application, supposons $u = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, c'est-à-dire considérons une sphère du rayon r; les trois coefficiens aux différentielles partielles seront évidemment

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2y, \quad \left(\frac{du}{dz}\right) = 2z;$$

ainsi, en divisant par ds chacune des trois dernières équations précédentes, on aura

$$\frac{zd^2y}{ds} - \frac{yd^2z}{ds} = 0,$$
$$\frac{zd^2x}{ds} - \frac{xd^2z}{ds} = 0,$$
$$\frac{xd^2y}{ds} - \frac{yd^2x}{ds} = 0.$$

Puis intégrant, il viendra

$$zdy - ydz = Ads,$$
$$zdx - xdz = Bds,$$
$$xdy - ydx = Cds;$$

A, B, C étant des constantes arbitraires introduites par l'intégration. Enfin, multipliant ces équations respectivement par x, $-y$, $-z$, qui sont les coordonnées courantes de la ligne géodésique que l'on considère; ensuite ajoutant, on aura définitivement

$$Ax - By - Cz = 0;$$

c'est, comme l'on sait, l'équation d'un plan passant par l'origine des coordonnées ou le centre de la sphère. Il suit donc de là qu'une ligne de plus courte distance sur la Terre supposée sphérique, est effectivement un arc de grand cercle. Nous examinerons plus tard les propriétés d'une pareille ligne, lorsque $u = 0$ représente l'équation d'un ellipsoïde de révolution, ou d'un sphéroïde quelconque peu différent d'une sphère.

Représentons par λ', λ'' les angles que les rayons de la sphère, menés aux extrémités de la ligne géodésique, font avec le plan des xy, et par φ', φ'' les angles de leurs projections avec l'axe des x. Soient de plus x', y', z', et x'', y'', z'' les coordonnées de ces mêmes extrémités; on aura

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\lambda'\cos\varphi', & y' &= r\cos\lambda'\sin\varphi', & z' &= r\sin\lambda'; \\ x'' &= r\cos\lambda''\cos\varphi'', & y'' &= r\cos\lambda''\sin\varphi'', & z'' &= r\sin\lambda''; \end{aligned}$$

et à cause de l'équation précédente du plan, il viendra, par substitution,

$$\frac{A}{C}\cos\lambda'\cos\varphi' - \frac{B}{C}\cos\lambda'\sin\varphi' - \sin\lambda' = 0,$$
$$\frac{A}{C}\cos\lambda''\cos\varphi'' - \frac{B}{C}\cos\lambda''\sin\varphi'' - \sin\lambda'' = 0.$$

Si l'on suppose que la ligne géodésique, partant du plan des xz, lui soit perpendiculaire, on aura $B = 0$, $\varphi' = 0$; ainsi

$$\frac{A}{C} = \operatorname{tang}\lambda', \quad \frac{A}{C} = \frac{\operatorname{tang}\lambda''}{\cos\varphi''},$$

d'où

$$\cos\varphi'' = \frac{\operatorname{tang}\lambda''}{\operatorname{tang}\lambda'};$$

équation qui exprime évidemment une des propriétés connues du triangle sphérique rectangle.

CHAPITRE XII.

Recherche des formules pour exprimer en fonction de la latitude différentes lignes de l'ellipsoïde de révolution, et applications de ces formules au sphéroïde terrestre.

167. Avant de nous assurer, par des mesures géodésiques, si la Terre est réellement un ellipsoïde de révolution, nous la supposerons telle. En conséquence, soit CE (fig. 39) le rayon de l'équateur, et P le pôle. Si par le point A on mène la tangente AT à l'arc elliptique PAE, la droite AM, perpendiculaire sur AT, sera la normale en ce point, et l'angle $ALT = FAT$ sera la latitude H du point A.

Soit de plus le rayon de l'équateur $CE = a$, celui du pôle $CP = b$; l'équation du méridien sera

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad (1),$$

x, y étant les coordonnées CF, FA d'un point A quelconque. Or, il résulte des principes du Calcul différentiel, que le rapport $\frac{dy}{dx}$ exprime en général la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à une courbe fait avec l'axe des x; l'on a donc

$$\frac{dy}{dx} = \cot H.$$

D'ailleurs, en différenciant l'équation (1), il vient $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$; ainsi

$$-\frac{b^2x}{a^2y} = \cot H \qquad (2).$$

Combinant entre elles les équations (1) et (2), on obtient aisément

$$x^2 = \frac{a^4 \cot^2 H}{b^2 + a^2 \cot^2 H}, \quad y^2 = \frac{b^4}{b^2 + a^2 \cot^2 H},$$

ou éliminant les cotangentes et extrayant la racine quarrée, on

trouve

$$x = \frac{a^2 \cos H}{\sqrt{b^2 \sin^2 H + a^2 \cos^2 H}}, \quad y = \frac{b^2 \sin H}{\sqrt{b^2 \sin^2 H + a^2 \cos^2 H}}.$$

Mais si l'on désigne par e le rapport de l'excentricité de l'ellipse du méridien au demi-grand axe, on aura $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$; et si en outre l'on change les cosinus en sinus, dans les dénominateurs des valeurs précédentes, il viendra

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a^2 \cos H}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 H}} = \frac{a \cos H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \\ y &= \frac{b^2 \sin H}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 H}} = \frac{a(1 - e^2) \sin H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Maintenant désignons par N la grande normale AM; par N' la petite normale AL; par τ la tangente AT; par τ' la tangente AT'; il est évident qu'on aura, à la seule inspection des triangles rectangles que présente la figure,

$$x = N \cos H, \quad y = \tau \cos H,$$
$$x = \tau' \sin H, \quad y = N' \sin H;$$

partant, à cause des valeurs de x et y trouvées ci-dessus,

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{x}{\cos H} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \quad \tau = y \text{ séc } H = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{tang} H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \\ N' &= \frac{y}{\sin H} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \quad \tau' = x \text{ coséc } H = \frac{a \cot H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} (4);$$

on a encore

$$\text{sous-normale } LF = N' \cos H = \frac{a(1 - e^2) \cos H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{sous-tangente } FT = \tau \sin H = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{tang} H \sin H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}},$$

$$CL = x - LF = \frac{a e^2 \cos H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}},$$

$$CM = CL \operatorname{tang} H = \frac{a e^2 \sin H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}.$$

Enfin, soit r le rayon AC de la Terre; on aura, par ce qui précède,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a \left[1 - \frac{e^2(1 - e^2) \sin^2 H}{1 - e^2 \sin^2 H}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (5).$$

Cette dernière valeur est susceptible de prendre une forme plus simple, et voici comment.

168. Si on imagine une sphère paE circonscrite à l'ellipsoïde PAE, laquelle ait pour rayon celui de l'équateur; qu'on prolonge l'ordonnée FA jusques en a, et que par ce point l'on mène la tangente aT: celle-ci et la tangente AT se rencontreront nécessairement au même point T sur l'axe CX; car, remarquons d'abord que l'ellipse donne

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

et le cercle circonscrit

$$y'^2 + x^2 = a^2,$$

y' étant l'ordonnée aF; de là

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \text{ et } y'^2 = a^2 - x^2;$$

et par suite

$$\frac{y'}{y} = \frac{a}{b}.$$

Mais sous-tangente dans l'ellipse $= y\,\frac{dx}{dy} = FT$,

sous-tangente dans le cercle $= y'\,\frac{dx}{dy} = FT'$;

de plus, à cause de $\frac{y'}{y} = \frac{a}{b}$, on a $dy' = \frac{a\,dy}{b}$; par conséquent

$$FT' = y'\,\frac{dx}{dy'} = y\,\frac{dx}{dy} = FT.$$

Soit maintenant λ l'angle aCF, et h l'angle ACF ou la latitude géocentrique du point A; on aura

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{y'}{x} \text{ et tang}\,h = \frac{y}{x};$$

divisant ces deux relations l'une par l'autre, on obtiendra définitivement

$$\text{tang}\,h = \frac{b}{a}\,\text{tang}\,\lambda.$$

D'un autre côté, les triangles rectangles AFT, aFT donnant $FT = y\,\text{tang}\,H = y'\,\text{tang}\,\lambda$, on a

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{b}{a}\,\text{tang}\,H \qquad (6),$$

et par suite

$$\text{tang}\, h = \frac{b^2}{a^2}\,\text{tang}\, H \qquad (7);$$

mais à cause de la relation (6),

$$\sin^2\lambda = \text{tang}^2\lambda\,\cos^2\lambda = \frac{\text{tang}^2\lambda}{1+\text{tang}^2\lambda} = \frac{\frac{b^2}{a^2}\text{tang}^2 H}{1+\frac{b^2}{a^2}\text{tang}^2 H};$$

puis mettant pour tang H, sa valeur $\frac{\sin H}{\cos H}$, et faisant attention que $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$, on a définitivement

$$\sin^2\lambda = \frac{(1-e^2)\sin^2 H}{1-e^2\sin^2 H};$$

partant, la valeur ci-dessus de r, désignée par (5), devient plus simplement

$$r = a\,(1 - e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}} \qquad (5'),$$

comme nous l'avions annoncé.

L'angle CAM de la verticale avec le rayon CA étant représenté par ω, il est évident que l'on a

$$\omega = H - h.$$

Mais

$$\text{tang}\,\omega = \frac{\text{tang}\, H - \text{tang}\, h}{1+\text{tang}\, H\,\text{tang}\, h} = \frac{\text{tang}\, H - \frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\text{tang}\, H} = \frac{\text{tang}\, H - \frac{b^2}{a^2}\text{tang}\, H}{1+\frac{b^2}{a^2}\text{tang}^2 H};$$

si donc l'on change les tangentes en sinus, et que l'on ait égard à ce que $\sin^2 H = \frac{1-\cos 2H}{2}$, et $\sin 2H = 2\sin H\cos H$, on aura

$$\text{tang}\,\omega = \frac{(a^2-b^2)\,\text{tang}\, H}{a^2+b^2\,\text{tang}^2 H} = \frac{1}{2}\,\frac{(a^2-b^2)\sin 2H}{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 H} = \frac{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\sin 2H}{1+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2H} \quad (8).$$

169. Pour achever de compléter ce système de formules, cherchons maintenant l'expression du rayon de courbure du méridien au point A, dont les coordonnées sont x, y. Soit ρ ce rayon; on aura, par la théorie connue des osculations, et en supposant dx constante,

prend ordinairement pour représenter le rapport des demi-axes de la Terre, deux nombres qui ne diffèrent que de l'unité.

Nous pourrions substituer l'aplatissement à l'excentricité dans toutes les formules précédentes, mais elles seraient évidemment moins simples, si l'on ne voulait pas y négliger les termes en α^2, c'est-à-dire les termes du second ordre.

Comme elles sont d'un fréquent usage en Géodésie, rassemblons ici les principales, et désignons par ξ le rayon du parallèle dont la latitude est H, auquel cas $\xi = x$; on aura

Normale terminée au petit axe, $N = \dfrac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$,

Normale terminée au grand axe, $N' = \dfrac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$;

Tangente terminée au grand axe, $\tau = \dfrac{a(1 - e^2) \operatorname{tang} H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$,

Tangente terminée au petit axe, $\tau' = \dfrac{a \cot H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$;

Rayon du parallèle, $\xi = \dfrac{a \cos H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$,

Rayon de courbure du méridien, $\rho = \dfrac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}$;

Rayon de la Terre, $r = a\left(1 - \dfrac{e^2(1 - e^2)\sin^2 H}{1 - e^2 \sin^2 H}\right)^{\frac{1}{2}}$,

ou $r = a(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}$:

H et λ étant liés par l'équation $\operatorname{tang} \lambda = \frac{b}{a} \operatorname{tang} H$. Dionis du Séjour et M. Legendre appellent λ *la latitude réduite*, par rapport à la vraie latitude H.

Enfin, ds étant la différentielle d'un arc s de méridien commençant à l'équateur et se terminant à la latitude H, on a

Différentielle d'un arc du méridien, $ds = \dfrac{a(1 - e^2)\,dH}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}$.

Mais toutes ces formules peuvent être mises sous une forme qui les rende susceptible d'être développées aisément en séries : en effet, à cause de

$$\frac{1}{1-e^2\sin^2 H}=\frac{1}{1-\frac{e^2}{2}+\frac{e^2}{2}\cos 2H}=\frac{1}{\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\left(1+\frac{e^2}{2-e^2}\cos 2H\right)},$$

si l'on fait, pour abréger, $n=\frac{e^2}{2-e^2}$, il s'ensuivra que $e^2=\frac{2n}{1+n}$, $1-\frac{e^2}{2}=\frac{1}{1+n}$, et que par conséquent

$$\frac{1}{1-e^2\sin^2 H}=\frac{1+n}{1+n\cos 2H};$$

par suite

$$N=\frac{a(1+n)^{\frac{1}{2}}}{(1+n\cos 2H)^{\frac{1}{2}}},\qquad N'=\frac{b^2}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\tau=\frac{b^2\operatorname{tang} H}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad \tau'=a\cot H\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\xi=a\cos H\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad \rho=\frac{b^2}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Quant au rayon de la Terre, son expression devient, en réduisant au même dénominateur, et ayant toujours égard à ce que $\sin^2 H=\frac{1-\cos 2H}{2}$,

$$r=a\left\{\frac{\left[1+\frac{e^2\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\cos 2H}{1-e^2+\frac{e^4}{2}}\right]\left[1-e^2+\frac{e^4}{2}\right]}{\left[1+\frac{e^2}{2-e^2}\cos 2H\right]\left[1-\frac{e^2}{2}\right]}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

or, en faisant encore $\frac{e^2}{2-e^2}=n$, et supposant de plus..... $\frac{e^2\left(1-\frac{e^2}{2}\right)}{1-e^2+\frac{e^4}{2}}=n'$, on aura

$$n'=\frac{2n}{1+n^2},\quad 1-\frac{e^2}{2}=\frac{1}{1+n},\quad 1-e^2+\frac{e^4}{2}=\frac{1}{1+n'};$$

partant,

$$r=a\left\{\frac{(1+n'\cos 2H)}{(1+n\cos 2H)}\frac{(1+n)}{(1+n')}\right\}^{\frac{1}{2}}\qquad (5''),$$

et

$$ds=\frac{b^2}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2H}\right)^{\frac{3}{2}}dH.$$

CHAPITRE XIII.

Développemens en séries, des formules précédentes.

SÉRIES FONDAMENTALES.

171. Lorsqu'on élève au quarré chacune des expressions finies des lignes de l'ellipsoïde de révolution, le dénominateur se compose d'une quantité de cette forme : $1 + n \cos z$; ainsi l'on peut se proposer de développer en général la fonction $\frac{1}{1 + n \cos z}$, ordonnée suivant les cosinus des multiples de l'angle z. Euler, dans son *Calcul intégral*, a résolu complètement ce problème; mais la théorie des exponentielles imaginaires conduit au but d'une manière beaucoup plus simple que celle employée par ce grand géomètre. En effet, feignons que l'on ait

$$\frac{1}{1 + n \cos z} = \frac{A + Bc^{z\sqrt{-1}}}{\alpha + \beta c^{z\sqrt{-1}}} + \frac{A + Bc^{-z\sqrt{-1}}}{\alpha + \beta c^{-z\sqrt{-1}}},$$

A, B, α, β étant des coefficiens indéterminés, et c la base des logarithmes hyperboliques : or, à cause de $\cos z = \frac{c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2}$, on a

$$\frac{2}{2 + n(c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}})} = \frac{A + Bc^{z\sqrt{-1}}}{\alpha + \beta c^{z\sqrt{-1}}} + \frac{A + Bc^{-z\sqrt{-1}}}{\alpha + \beta c^{-z\sqrt{-1}}};$$

et si l'on réduit au même dénominateur les deux termes du second membre de cette équation, puis qu'on égale entre eux les termes homogènes, on aura ces relations

$$A\alpha + B\beta = 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2,$$
$$A\beta + B\alpha = 0, \quad \alpha\beta = n,$$

desquelles on obtient

$$A(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha, \ \alpha^2 = 1 + \sqrt{1 - n^2}, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n},$$
$$B(\beta^2 - \alpha^2) = \beta, \ \beta^2 = 1 - \sqrt{1 - n^2}, \ \alpha^2 - \beta^2 = 2\sqrt{1 - n^2};$$

ainsi

$$\frac{1}{1+n\cos z}=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{1-\frac{\beta}{\alpha}c^{z\sqrt{-1}}}{1+\frac{\beta}{\alpha}c^{z\sqrt{-1}}}+\frac{1-\frac{\beta}{\alpha}c^{-z\sqrt{-1}}}{1+\frac{\beta}{\alpha}c^{-z\sqrt{-1}}}\right].$$

Si, pour abréger, l'on fait $\frac{\beta}{\alpha}=m$, ensuite que l'on réduise en série chacune des fractions $\frac{1-mc^{z\sqrt{-1}}}{1+mc^{z\sqrt{-1}}}$, $\frac{1-mc^{-z\sqrt{-1}}}{1+mc^{-z\sqrt{-1}}}$, et que l'on ait égard à ce qu'en général $\cos\mu z=\frac{c^{\mu z\sqrt{-1}}+c^{-\mu\sqrt{-1}}}{2}$, on trouvera définitivement

$$(A)\ldots\frac{1}{1+n\cos z}=\frac{1}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}(1-2m\cos z+2m^2\cos 2z-2m^3\cos 3z+2m^4\cos 4z\ldots).$$

La même méthode s'emploie avec un égal succès pour réduire en série de cette forme la fonction $\log(1+n\cos z)$. Pour le prouver, soit encore mis ici $\frac{c^{z\sqrt{-1}}+c^{-z\sqrt{-1}}}{2}$, au lieu de $\cos z$; on aura

$$\log(1+n\cos z)=\log(2+nc^{z\sqrt{-1}}+nc^{-z\sqrt{-1}})-\log 2;$$

et parce que l'on peut supposer que

$$2+nc^{z\sqrt{-1}}+nc^{-z\sqrt{-1}}=(\alpha+\beta c^{z\sqrt{-1}})(\alpha+\beta c^{-z\sqrt{-1}}),$$

α et β étant indéterminés, on aura, en développant et égalant la quantité rationnelle à la quantité rationnelle, et la partie imaginaire à la partie imaginaire,

$$\alpha^2+\beta^2=2,\qquad \alpha\beta=n;$$

ainsi

$$2\alpha=\sqrt{2}(\sqrt{1+n}+\sqrt{1-n}),\qquad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}=m,$$

$$2\beta=\sqrt{2}(\sqrt{1+n}-\sqrt{1-n}),\qquad n=\frac{2m}{1+m^2};$$

et comme en général $\log(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots$, on trouvera, après les réductions convenables,

$$(B)\ldots\log(1+n\cos z)=\log\frac{\alpha^2}{2}+\log(1+mc^{z\sqrt{-1}})+\log(1+mc^{-z\sqrt{-1}})$$

$$=-\log\frac{2m}{n}+2M[m\cos z-\tfrac{1}{2}m^2\cos 2z+\tfrac{1}{3}m^3\cos 3z-\ldots],$$

$M = 0{,}43429448$ étant le module des tables; ce qui est conforme au résultat auquel Euler est parvenu.

172. Développons, par le même procédé, la fonction $\frac{1}{(1+n\cos z)^2}$. On a d'abord

$$\frac{1}{1+n\cos z} = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}(1-2m\cos z+2m^2\cos 2z-2m^3\cos 3z+2m^4\cos 4z-\text{etc.});$$

et si l'on multiplie, ensuite qu'on divise la valeur précédente de m, par $1+\sqrt{1-n^2}$, on aura

$$m = \frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}}.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{(1+n\cos z)^2} = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1-2m\cos z+2m^2\cos 2z-2m^3\cos 3z+\text{etc.}}{1+n\cos z}\right];$$

et si l'on suppose que

$$\frac{1}{(1+n\cos z)^2} = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}[1+E_{(1)}\cos z+E_{(2)}\cos 2z+E_{(3)}\cos 3z+\text{etc.}],$$

on aura alors

$$\frac{1}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1-2m\cos z+2m^2\cos 2z-2m^3\cos 3z\ldots}{1+n\cos z}\right]$$
$$= \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}[1+E_{(1)}\cos z+E_{(2)}\cos 2z+E_{(3)}\cos 3z\ldots];$$

puis, après avoir chassé le dénominateur $1+n\cos z$,

$$\frac{1-n^2}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}[1-2m\cos z+2m^2\cos 2z-2m^3\cos 3z\ldots]$$
$$= \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\begin{array}{l}1+E_{(1)}\cos z+E_{(2)}\cos 2z+E_{(3)}\cos 3z\ldots\ldots\ldots\\ \quad +n\cos z+nE_{(1)}\cos z\cos z+nE_{(2)}\cos z\cos 2z\ldots\end{array}\right].$$

Mais en général $\frac{1}{2}\cos(\mu+1)z+\frac{1}{2}\cos(\mu-1)z = \cos\mu z\cos z$; ainsi, on a l'équation identique

$$\begin{aligned}&(1-n^2)[1-2m\cos z+2m^2\cos 2z-2m^3\cos 3z+\text{etc.}]\\ &= 1+E_{(1)}\cos z+E_{(2)}\cos 2z+E_{(3)}\cos 3z+\text{etc.}\\ &\quad +n\cos z+\tfrac{1}{2}nE_{(1)}\cos 2z+\tfrac{1}{2}nE_{(2)}\cos 3z+\text{etc.}\\ &\quad +\frac{n}{2}E_{(1)}+\tfrac{1}{2}nE_{(2)}\cos z+\tfrac{1}{2}nE_{(3)}\cos 2z+\tfrac{1}{2}nE_{(4)}\cos 3z+\text{etc.}\end{aligned}$$

Égalant les termes semblables, il vient

$$\begin{aligned}
1 - n^2 &= 1 + \tfrac{1}{2} nE_{(1)},\\
-2m\,(1-n^2) &= E_{(1)} + n + \tfrac{1}{2} nE_{(2)},\\
+2m^2\,(1-n^2) &= E_{(2)} + \tfrac{1}{2} nE_{(1)} + \tfrac{1}{2} nE_{(3)},\\
-2m^3\,(1-n^2) &= E_{(3)} + \tfrac{1}{2} nE_{(2)} + \tfrac{1}{2} nE_{(4)};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en mettant pour m sa valeur $\frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}}$,

$$\begin{aligned}
E_{(1)} &= -2n,\\
E_{(2)} &= 2.\frac{(2n^2-1+\sqrt{1-n^2})}{1+\sqrt{1-n^2}} = \frac{2n^2(1+2\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^2},\\
E_{(3)} &= -2.\frac{(3n^3-2n+2n\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^2} = \frac{-2n^3(1+3\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^3},\\
E_{(4)} &= 2.\frac{(4n^4-3n^2+3n^2\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^3} = \frac{2n^4(1+4\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E_{(i)} &= \pm\frac{2n^i(1+i\sqrt{1-n^2})}{(1+\sqrt{1-n^2})^i};
\end{aligned}$$

ou enfin, pour abréger,

$$\begin{aligned}
E_{(1)} &= -2n,\\
E_{(2)} &= 2m^2(1+2\sqrt{1-n^2}),\\
E_{(3)} &= -2m^3(1+3\sqrt{1-n^2}),\\
E_{(4)} &= 2m^4(1+4\sqrt{1-n^2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E_{(i)} &= \pm 2m^i(1+i\sqrt{1-n^2}).
\end{aligned}$$

Telles sont les valeurs que M. Laplace a obtenues par un procédé différent (*Mécaniq. célest.*, tom. I, pag. 156).

173. La fonction $(1+n\cos z)^{\mu}$ peut aussi se développer en série de la forme $A + B\cos z + C\cos 2z + D\cos 3z + \ldots$; mais comme nous n'aurons besoin par la suite que du développement particulier de $\frac{1}{(1+n\cos z)^{\frac{3}{2}}}$, nous effectuerons ce dernier par la méthode naturelle, laquelle consiste à développer d'abord $(1+n\cos z)^{-\frac{3}{2}}$ par la formule du binome, et ensuite à changer dans le résultat les puissances du cosinus de l'arc z en cosinus de ses multiples. Cependant, afin de pouvoir découvrir aisément la loi des coefficiens numériques du développement, nous aurons soin de n'effectuer aucune réduction

dans la formule générale,

$$2^{\mu-1}\cos z^{\mu}=\cos\mu z+\mu\cos(\mu-2)z+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos(\mu-4)z$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\cos(\mu-6)z+\ldots,$$

qui, comme l'on sait, exige que l'on s'arrête lorsque l'arc devient négatif, et que l'on ne prenne que la moitié du coefficient du cosinus de l'arc nul que l'on trouvera, si μ est pair.

Il résulte de là, que l'on a d'abord

$$(1+n\cos z)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}n\cos z+\frac{3}{2}.\frac{5}{4}n^2\cos^2 z-\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}n^3\cos^3 z$$
$$+\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}.\frac{9}{8}n^4\cos^4 z\ldots,$$

ensuite en ordonnant par rapport à $\cos z$, $\cos 2z$, $\cos 3z\ldots$

$$(1+n\cos z)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2^2}.\frac{5}{4}n^2+\frac{3}{2^4}.\frac{5.7.9}{4.6.8}.\frac{4.3}{2^2}n^4+\frac{3}{2^6}.\frac{5.7.9.11.13}{4.6.8.10.12}.\frac{6.5.4}{2^2.3}n^6$$
$$+\frac{3}{2^8}.\frac{5.7.9.11.13.15.17}{4.6.8.10.12.14.16}.\frac{8.7.6.5}{2^2.3.4}n^8$$
$$-\left[\frac{3}{2}n+\frac{3.5.7.3}{2^3.4.6}n^3+\frac{3.5.7.9.11.5.4}{2^5.4.6.8.10.2}n^5+\frac{3.5.7.9.11.13.15.7.6.5}{2^7.4.6.8.10.12.14.2.3}n^7\ldots\right]\cos z$$
$$+\left[\frac{3}{2^2}.\frac{5}{4}n^2+\frac{3.5.7.9.4}{2^4.4.6.8.1}n^4+\frac{3.5.7.9.11.13.6.5}{2^6.4.6.8.10.12.2}n^6\ldots\ldots\ldots\ldots\right]\cos 2z$$
$$-\left[\frac{3.5.7}{2^3.4.6}n^3+\frac{3.5.7.9.11.5}{2^5.4.6.8.10.1}n^5+\frac{3.5.7.9.11.13.15.7.6}{2^7.4.6.8.10.12.14.2}n^7\ldots\ldots\ldots\right]\cos 3z$$
$$+\left[\frac{3.5.7.9}{2^4.4.6.8}n^4+\frac{3.5.7.9.11.13.6}{2^6.4.6.8.10.12.1}n^6+\frac{3.5.7.9.11.13.15.17.8.7}{2^8.4.6.8.10.12.14.16.2}n^8\ldots\right]\cos 4z$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou bien, plus simplement,

$$(1+n\cos z)^{-\frac{3}{2}}=\left[1+\frac{3.5}{2^2.2.2}n^2+\frac{3.5.7.9}{2^4.2.2.4.4}n^4+\frac{3.5.7.9.11.13}{2^6.2.2.4.4.6.6}n^6\right.$$
$$\left.+\frac{3.5.7.9.11.13.15.17}{2^8.2.2.4.4.6.6.8.8}n^8\ldots\ldots\right]$$
$$-2n\left[\frac{3}{2^1.2}+\frac{3.5.7}{2^3.2.2.4}n^2+\frac{3.5.7.9.11}{2^5.2.2.4.4.6}n^4+\frac{3.5.7.9.11.13.15}{2^7.2.2.4.4.6.6.8}n^6\ldots\right]\cos z$$
$$+4n^2\left[\frac{1.3.5}{2^2.2.2.4}+\frac{2.3.5.7.9}{2^4.2.2.4.4.6}n^2+\frac{3.3.5.7.9.11.13}{2^6.2.2.4.4.6.6.8}n^4\ldots\ldots\ldots\right]\cos 2z$$
$$-8n^3\left[\frac{1.2.3.5.7}{2^3.2.2.4.4.6}+\frac{2.3.3.5.7.9.11}{2^5.2.2.4.4.6.6.8}n^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]\cos 3z$$
$$+16n^4\left[\frac{1.2.3.3.5.7.9}{2^4.2.2.4.4.6.6.8}+\frac{2.3.4.3.5.7.9.11.13.}{2^6.2.2.4.4.6.6.8.8.10}n^2\ldots\ldots\ldots\ldots\right]\cos 4z$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

série convergente, lorsque n est plus petit que l'unité. Si l'on désigne respectivement les coefficiens de ses termes par $q, q', q'', q'''\ldots\ldots$, on aura

$$(C)\ldots\left(\frac{1}{1+n\cos z}\right)^{\frac{3}{2}}=q-q'\cos z+q''\cos 2z-q'''\cos 3z+q^{\text{IV}}\cos 4z$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Avec un peu d'attention, l'on reconnaîtra que le terme général du premier polynome q de cette série est, en désignant par h le rang de celui que l'on cherche,

$$+\frac{3.5.7.9\ldots\ldots\ldots[4h-3]}{2^{(2h-2)}2^2.4^2.6^2\ldots\ldots[2h-2]^2}.n^{(2h-2)},$$

et que le terme général du polynome $q^{(i)}\cos(i-1)z$, occupant le rang i dans cette même série, est

$$\mp 2^{i-1}n^{i-1}\left[+\frac{h(h+1)..[i+h-3].3.5.7..[2i+4h-5]}{2^{(i+2h-3)}2^2.4^2.6^2\ldots\ldots\ldots[2i+2h-4]}n^{(2h-2)}\right]\cos(i-1)z,$$

le signe — ayant lieu lorsque i est pair, et le signe + lorsque i est impair; et les facteurs $h\ (h+1)\ldots.[i+h-3]$ ne devant être pris que quand $[i+h-3]$ est plus grand que h.

174. Il nous sera encore utile par la suite, de connaître le développement de la valeur de

$$U^{\mu}=\frac{e^{\mu}}{(1+\sqrt{1-e^2})^{\mu}},$$

procédant suivant les puissances de e. Dans cette vue, soit.... $k=1+\sqrt{1-e^2}=\frac{1}{k_1}$; on aura $k=2-\frac{e^2}{k}$: or, par un théorème de Lagrange, généralisé par M. Laplace, lorsque $y=a+x\varphi(y)$; on a (*Calc differ.* de M. Lacroix, tom. I, pag. 282, 2ᵉ édit.)

$$f(y)=f(a)+\varphi(a)\frac{d.f(a)}{da}.x+\frac{d.\left(\varphi^2(a)\frac{d.f(a)}{da}\right)}{da}.\frac{x^2}{2}$$
$$+\frac{d^2.\left(\varphi^3(a)\frac{d.f(a)}{da}\right)}{da^2}.\frac{x^3}{2.3}+\ldots\ldots\ldots$$

Comparant donc

$$y=a+x\varphi(y)$$

avec la proposée

$$k = 2 - e^2 \frac{1}{k},$$

on a

$$a = 2, \quad x = -e^2, \quad \varphi(y) = \frac{1}{k};$$

par conséquent si l'on veut avoir la valeur de k^μ, auquel cas..... $f(y) = k^\mu$, on aura

$$f(a) = 2^\mu, \ \varphi(a) = \frac{1}{2},$$

$$\varphi(a)\frac{d.f(a)}{da} = \frac{1}{2}.\mu.2^{\mu-1} = \mu.2^{\mu-2},$$

$$\varphi^2(a)\frac{d.f(a)}{da} = \frac{1}{2^2}.\mu.2^{\mu-1} = \mu.2^{\mu-3},$$

$$\frac{d.\left(\varphi^2(a)\frac{d.f(a)}{da}\right)}{da} = \mu.(\mu-3).2^{\mu-4},$$

$$\varphi^3(a)\frac{d.f(a)}{da} = \frac{1}{2^3}.\mu.2^{\mu-1} = \mu.2^{\mu-4},$$

$$\frac{d^2.\left(\varphi^3(a)\frac{d.f(a)}{da}\right)}{da^2} = \mu.(\mu-4)(\mu-5).2^{\mu-6}.$$

Ainsi la substitution de ces valeurs, dans la série précédente, donne

$$k^\mu = 2^\mu - \mu.2^{\mu-2}e^2 + \frac{\mu(\mu-3)}{1.2}.2^{\mu-4}e^4 - \frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1.2.3}2^{\mu-6}e^6 + \ldots$$

Mais à cause de $k_1 = \frac{1}{k}$, on a $k_1^\mu = \frac{1}{k^\mu}$; donc

$$k_1^\mu = \frac{1}{2^\mu} + \frac{\mu.e^2}{2^{\mu+2}} + \frac{\mu(\mu+3)}{1.2}.\frac{e^4}{2^{\mu+4}} + \frac{\mu(\mu+4)(\mu+5)}{1.2.3}.\frac{e^6}{2^{\mu+6}} + \ldots.$$

Donc enfin

$$(D)\ldots U^\mu = \left(\frac{e}{2}\right)^\mu \left\{1 + \frac{\mu}{1}\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{\mu(\mu+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{\mu(\mu+4)(\mu+5)}{1.2.3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \ldots\right\}.$$

Cette série, dont le terme général est

$$+\left(\frac{e}{2}\right)^\mu \left\{\frac{\mu(\mu+i)(\mu+i+1)(\mu+i+2)(\mu+i+3)\ldots\ldots[\mu+(2i-3)]}{1.2.3.4.5\ldots.(i-1)}\left(\frac{e}{2}\right)^{2(i-1)}\right\},$$

trouve son application dans les hautes sciences mathématiques (*voy.* le tom. I de la *Mécan. célest.*, pag. 180).

Applications des séries fondamentales.

175. En prenant le logarithme de la valeur de la normale N donnée à l'art. 170, l'on aura, à cause de la série (B),

$$\begin{aligned}\log N &= \log a + \tfrac{1}{2}\log(1+n) - \tfrac{1}{2}\log(1+n\cos 2H)\\ &= \log a + \tfrac{1}{2}\log(1+n) + \tfrac{1}{2}\log(1+m^2)\\ &\qquad - M[m\cos 2H - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m^3\cos 6H - \ldots]\\ &= \log a + M[m - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{3}m^3 - \ldots\ldots]\\ &\qquad - M[m\cos 2H - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m^3\cos 6H - \ldots].\end{aligned}$$

Par la même raison,

$$\begin{aligned}\log N' &= \log\frac{b^2}{a} + M[m - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{3}m^3 - \ldots]\\ &\qquad - M[m\cos 2H - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m^3\cos 6H - \ldots]\\ \log \rho &= \log\frac{b^2}{a} + 3M[m - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{3}m^3 - \ldots]\\ &\qquad - 3M[m\cos 2H - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m^3\cos 6H - \ldots],\end{aligned}$$

et ainsi de même pour les logarithmes des autres lignes du sphéroïde.

Pour ce qui concerne le logarithme du rayon de la Terre, son développement en série sera un peu différent; car de l'équation (5″), art. 170, on tire

$$\begin{aligned}\log\frac{r}{a} &= \tfrac{1}{2}\log(1+n) + \tfrac{1}{2}\log(1+n'\cos 2H)\\ &\qquad - \tfrac{1}{2}\log(1+n') - \tfrac{1}{2}\log(1+n\cos 2H);\end{aligned}$$

et à cause de

$$\begin{aligned}\log(1+n\cos 2H) &= -\log(1+m^2)\\ &\qquad + 2M[m\cos 2H - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m^3\cos 6H - \ldots],\end{aligned}$$

et de la relation $\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n} = m$, on aura pareillement

$$\begin{aligned}\log(1+n'\cos 2H) &= -\log(1+m'^2)\\ &\qquad + 2M[m'\cos 2H - \tfrac{1}{2}m'^2\cos 4H + \tfrac{1}{3}m'^3\cos 6H - \ldots].\end{aligned}$$

D'ailleurs on sait par ce qui précède, que $n' = \frac{2n}{1+n^2}$; donc $m' = n$, ou $m' = \frac{1}{n}$; mais comme n est plus petit que l'unité, cette seconde valeur de m' ne peut être admise, puisqu'elle rendrait la série diver-

gente; donc

$$\log\frac{r}{a}=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+m^2}{1+n}\right)$$
$$+M[(n-m)\cos 2H-\tfrac{1}{2}(n^2-m^2)\cos 4H+\tfrac{1}{3}(n^3-m^3)\cos 6H-..];$$

et puisque $n=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, $m=\frac{a-b}{a+b}$, à cause de $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$, on a

$$\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+m^2}{1+n}\right)=\log\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)-\log a;$$

donc enfin

$$\log r=\log a+\log\left(\frac{a^2+b^2}{a(a+b)}\right)$$
$$+M[(n-m)\cos 2H-\tfrac{1}{2}(n^2-m^2)\cos 4H+\tfrac{1}{3}(n^3-m^3)\cos 6H-..].$$

Dans le second volume de la *Méridienne*, et le discours préliminaire des *Tables du Bureau des Longitudes*, M. Delambre a donné le logarithme de r en série ordonnée, comme la précédente, suivant les cosinus linéaires de la latitude; mais j'ai préféré d'en rendre la loi des termes manifeste.

Voici ce logarithme, en fonction de l'aplatissement,

$$\log r=\log a-M[\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{8}\alpha^2-\tfrac{5}{24}\alpha^3-(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{4}\alpha^2-\tfrac{1}{8}\alpha^3)\cos 2H$$
$$+\tfrac{3}{8}(\alpha^2+\alpha^3)\cos 4H-\tfrac{7}{24}\alpha^3\cos 6H+\ldots].$$

Si au lieu des logarithmes, on voulait les valeurs mêmes de ces lignes, voici comment l'on procéderait pour arriver encore à des séries régulières et fort simples.

Par exemple, la valeur de N élevée au quarré, donne

$$\frac{N^2}{a^2}=\frac{(1+n)}{1+n\cos 2H};$$

et, par la formule (A) de l'art. 171, on a

$$\frac{N^2}{a^2}=\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^{\frac{1}{2}}(1-2m\cos 2H+2m^2\cos 4H-2m^3\cos 6H+\ldots\ldots)$$
$$=\frac{a}{b}(1-2m\cos 2H+2m^2\cos 4H-2m^3\cos 6H+\ldots\ldots).$$

Il est évident que les expressions des autres lignes du sphéroïde se transformeraient également en séries de mêmes formes que cette dernière.

Comme toutes ces transformations sont très faciles à effectuer, je me dispenserai de les donner. J'observerai seulement, que pour parvenir aux valeurs des premières puissances des lignes du sphéroïde, qui ne continssent de même que les cosinus des multiples de la latitude, il serait nécessaire de suivre la méthode que j'ai donnée à l'art. 173, pour développer ainsi l'expression du rayon de courbure du méridien; mais alors la loi des coefficiens serait bien moins simple que celle ci-dessus.

176. Il est à remarquer que les valeurs de n et de m, élevées à une puissance entière quelconque, peuvent être exprimées aussi en séries régulières; car d'abord puisque $n = \frac{e^2}{2 - e^2}$, on obtient sur-le-champ, par la formule du binome,

$$n = \left(\frac{e^2}{2}\right)^1 + \left(\frac{e^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^2}{2}\right)^3 + \left(\frac{e^2}{2}\right)^4 + \ldots,$$

et ensuite, par la méthode connue de l'élévation d'un polynome à la puissance μ,

$$n^\mu = \left(\frac{e^2}{2}\right)^\mu \left[\begin{array}{l} 1 + \mu\left(\frac{e^2}{2}\right)^1 + \left(\mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)\left(\frac{e^2}{2}\right)^2 \\ \quad + \left(\mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.3}\right)\left(\frac{e^2}{2}\right)^3 + \ldots \end{array}\right];$$

d'ailleurs

$$n' = \frac{2n}{1+n^2} = \frac{a^4 - b^4}{a^4 + b^4},$$

ou, si l'on veut,

$$n' = 2n(1+n^2)^{-1} = 2n(1 - n^2 + n^4 - n^6 + \ldots).$$

Il s'agit aussi de connaître la valeur générale de m^μ : or, on a vu, à l'art. 171, que $\frac{1 - \sqrt{1-n^2}}{n} = m$; par conséquent

$$m = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}} = \left(\frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}\right)^2;$$

expression qui est la même que celle de l'article 174; on a donc généralement, en vertu de l'équation (D),

$$m^{\mu}=\left(\frac{e}{2}\right)^{2\mu}\left\{1+2\mu\left(\frac{e}{2}\right)^{2}+\frac{2\mu(2\mu+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^{4}+\frac{2\mu(2\mu+4)(2\mu+5)}{1.2.3}\left(\frac{e}{2}\right)^{6}\right.$$
$$\left.+\frac{2\mu(2\mu+5)(2\mu+6)(2\mu+7)}{1.2.3.4}\left(\frac{e}{2}\right)^{8}+\ldots\right\}.$$

177. On ne peut évaluer numériquement toutes les séries précédentes, sans connaître les axes de la Terre. A l'instar de la Commission des poids et mesures, qui fut créée à l'époque où l'on introduisit en France le système métrique décimal, j'emploierai à cette recherche les arcs du méridien, mesurés à l'équateur et sur le territoire français, afin de parvenir aux résultats mêmes que cette Commission a obtenus, et dont elle a rendu compte à l'Institut, par l'organe de M. Van-Swinden. *Voyez* le rapport de ce savant, inséré parmi les Mémoires de cette Société, tom. II, pag. 43. Mais, avant tout, il s'agit d'intégrer l'équation différentielle d'un arc du méridien.

D'abord, à cause de la série (C), et de la valeur de ds donnée à l'art. 170, on a

$$s=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{qH-\frac{q'}{2}\sin 2H+\frac{q''}{4}\sin 4H-\frac{q'''}{6}\sin 6H+\ldots\right\}:$$

or, l'intégrale est complète, parce que l'arc s s'évanouissant en même tems que H, la constante est nécessairement nulle.

Il est évident que pour un autre arc s', terminé à la latitude H', on a de même

$$s'=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{qH'-\frac{q'}{2}\sin 2H'+\frac{q''}{4}\sin 4H'-\frac{q'''}{6}\sin 6H'+\ldots\right\};$$

ainsi, entre les limites H et H', considérées comme les latitudes des extrémités de l'arc $\mathcal{A}$, on trouve, d'après l'art. 45,

$$\mathcal{A}=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{\begin{array}{l} q(H'-H)-q'\sin(H'-H)\cos(H'+H)\\ \qquad+\frac{q''}{2}\sin 2(H'-H)\cos 2(H'+H)\\ \qquad-\frac{q'''}{3}\sin 3(H'-H)\cos 3(H'+H)\ldots\end{array}\right\}.$$

Pour un autre arc $\mathcal{A}$ compris entre les latitudes Λ et Λ', on a pareillement

$$\mathcal{A}'=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{\begin{array}{l} q(\Lambda'-\Lambda)-q'\sin(\Lambda'-\Lambda)\cos(\Lambda'+\Lambda)\\ \qquad+\frac{q''}{2}\sin 2(\Lambda'-\Lambda)\cos 2(\Lambda'+\Lambda)\\ \qquad-\frac{q'''}{3}\sin 3(\Lambda'-\Lambda)\cos 3(\Lambda'+\Lambda)\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Dans la vue d'abréger la notation, soit

$$H' - H = \varphi, \quad H' + H = \Phi,$$
$$\Lambda' - \Lambda = \varphi', \quad \Lambda' + \Lambda = \Phi';$$

alors les deux équations précédentes seront

$$(\mathrm{M})\ldots\left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{q\varphi - q'\sin\varphi\cos\Phi + \frac{q''}{2}\sin 2\varphi\cos 2\Phi \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{q'''}{3}\sin 3\varphi\cos 3\Phi \ldots\right\} \\ \mathcal{A}'=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{q\varphi' - q'\sin\varphi'\cos\Phi' + \frac{q''}{2}\sin 2\varphi'\cos 2\Phi' \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{q'''}{3}\sin 3\varphi'\cos 3\Phi' \ldots\right\}. \end{array}\right.$$

Avant d'en déduire une relation entre les quantités connues et les puissances de l'excentricité, mettons pour q, q', q'', q''', leurs valeurs en e^2, en bornant toutefois l'approximation aux termes en e^4: or, par ce qui précède,

$$n = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4}; \quad \text{donc } n^2 = \frac{e^4}{4};$$

ainsi on a

$$q = 1 + \frac{15}{64}e^4, \quad q' = \frac{3}{4}\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right), \quad q'' = \frac{15}{64}e^4.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (M), il vient

$$\mathcal{A} = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{\left(1 + \frac{15}{64}e^4\right)\varphi - \frac{3}{4}\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\sin\varphi\cos\Phi \right. \\ \left. + \frac{15}{128}e^4\sin 2\varphi\cos 2\Phi\right\},$$

$$\mathcal{A}' = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{\left(1 + \frac{15}{64}e^4\right)\varphi' - \frac{3}{4}\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\sin\varphi'\cos\Phi' \right. \\ \left. + \frac{15}{128}e^4\sin 2\varphi'\cos 2\Phi'\right\};$$

et soit encore, pour abréger,

$$\frac{\pi}{200^g}(\mathcal{A}\varphi' - \mathcal{A}'\varphi) = M, \quad \mathcal{A}\sin\varphi'\cos\Phi' - \mathcal{A}'\sin\varphi\cos\Phi = N,$$
$$\mathcal{A}\sin 2\varphi'\cos 2\Phi' - \mathcal{A}'\sin 2\varphi\cos 2\Phi = P;$$

on aura, en divisant les deux équations ci-dessus l'une par l'autre, et rétablissant l'homogénéité,

$$\frac{15}{64}e^4\left(M - \frac{8}{5}N + \frac{P}{2}\right) - \frac{3}{4}e^2 N + M = 0,$$

d'où l'on tire aisément, en résolvant cette équation du second degré, ou par le retour des suites,

$$\left.\begin{aligned} e^2 = \frac{4M}{3N} &+ \frac{5}{16N}\left(M - \frac{8}{5}N + \frac{P}{2}\right)\left(\frac{4M}{3N}\right)^2 \\ &+ \frac{2.25}{16^2N^2}\left(M - \frac{8}{5}N + \frac{P}{2}\right)^2\left(\frac{4M}{3N}\right)^3 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{N}).$$

Ainsi, la comparaison de deux arcs de méridien est, en général, propre à faire connaître les dimensions de la Terre.

Applications numériques.

Suivant les opérations géodésiques de MM. Delambre et Méchain (résultats provisoires),

$$A = 551584^t,72,\quad H' = 56^g,706944,\quad H = 45^g,958281 \text{ (boréales)};$$

et suivant celles de Bouguer, admises par la Commission des poids et mesures,

$$A' = 176897^t,4,\quad \Lambda' = 0^g,0463 \text{ (boréale)},\quad \Lambda = -3^g,4170 \text{ (australe)}.$$

Il suit de là que

$$\begin{aligned} \varphi &= H' - H = 10^g,748663, & \Phi &= H' + H = 102^g,665225, \\ \varphi' &= \Lambda' - \Lambda = 3,4633, & \Phi' &= \Lambda' + \Lambda = -3,3707; \end{aligned}$$

d'ailleurs

$$M = \frac{\pi}{200^g}(A\varphi' - A'\varphi),$$

π étant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$; ainsi, on a

$$\begin{aligned} A\varphi' &= 1910303,4, & A'\varphi &= 1901410,5, \\ \pi &= 3,1415927, & \frac{A\varphi' - A'\varphi}{200} &= 44,464, \\ M &= 139,688, \\ A\sin\varphi'\cos\Phi' &= 29950,11, & A'\sin\varphi\cos\Phi &= -1244,10, \\ N &= 31194,21, \\ A\sin 2\varphi'\cos 2\Phi' &= 59560,12, & A'\sin 2\varphi\cos 2\Phi &= -58400,91, \\ P &= 117961,03, \end{aligned}$$

de plus

$$M - \frac{8}{5}N + \frac{1}{2}P = 9209,3;$$

en sorte que le premier terme de la valeur de e^2 est

$$= 0{,}0059706841$$

le second terme $= 0{,}0000032889$

le troisième $= 0{,}0000000036$

donc $e^2 = 0{,}0059739766.$

Mais l'aplatissement de la Terre,

$$\alpha = 1 - (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} e^2 + \tfrac{1}{8} e^4 + \tfrac{1}{16} e^6 + \ldots;$$

donc

$$\alpha = 0{,}0029914494 = \frac{1}{334{,}29}.$$

Concluons de là, que les mesures géodésiques de la France et du Pérou, adoptées par la Commission, donnent le rapport des axes $\frac{b}{a}$ égal à $\frac{333}{334}$.

178. L'aplatissement étant une fois trouvé, on peut calculer la longueur du quart du méridien ainsi qu'il suit.

La formule

$$s = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{qH - \frac{q'}{2}\sin 2H + \frac{q''}{4}\sin 4H - \ldots\right\},$$

en y faisant $H = 100^g = \frac{1}{2}\pi$, devient, à cause de $s = Q$, Q étant alors le quart du méridien,

$$Q = \frac{b^2(1+n)^{\frac{3}{2}}}{a} q \cdot \frac{\pi}{2};$$

on a d'ailleurs

$$A = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{\begin{array}{l} q\varphi - q' \sin\varphi \cos\Phi + \frac{q''}{2}\sin 2\varphi \cos 2\Phi \\ \qquad\qquad - \frac{q'''}{3}\sin 3\varphi \cos 3\Phi \end{array}\right\};$$

ainsi, divisant ces deux équations l'une par l'autre, réduisant en série, et s'arrêtant toujours aux termes en e^4, il vient, à cause de $\frac{q'}{q} = \frac{3}{4}\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)$, $\frac{q''}{2q} = \frac{15}{128}e^4$,

$$Q = \frac{\frac{1}{2}\pi A}{\varphi}\left[\begin{array}{l} 1 + \frac{3}{4}\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\frac{\sin\varphi\cos\Phi}{\varphi} - \frac{15}{128}e^4\frac{\sin 2\varphi \cos 2\Phi}{\varphi} \\ \qquad\qquad + \frac{9}{16}e^4\frac{\sin^2.\varphi \cos^2.\Phi}{\varphi^2} \end{array}\right];$$

formule qui, étant préparée pour le calcul, se change en celle-ci :

$$Q=\frac{100^{t}A}{\varphi}\left[1+\frac{3.200}{4\pi\varphi}\left(e^{2}+\frac{1}{2}e^{4}\right)\sin\varphi\cos\Phi-\frac{15.200}{128\pi\varphi}e^{4}\sin 2\varphi\cos 2\Phi\right.$$
$$\left.+\frac{9.40000}{16\pi^{2}\varphi^{2}}e^{4}\sin^{2}.\varphi\cos^{2}.\Phi\right],$$

et qui est précisément la même que celle à laquelle M. Delambre est parvenu par une voie analogue (pag. 676, tom. II de la *Base du Système métrique*). Bien entendu que φ doit y être exprimée en grades.

Lorsque A est donné en toises, le quart du méridien est exprimé en pareilles unités. Pour l'avoir en lignes, il faut le multiplier par 864; et puisque le mètre μ en est la 10 millionnième partie, on a, en rétablissant la notation primitive,

$$\mu=\frac{0,0000864.\frac{1}{2}\pi A}{(H'-H)}\left[1+\left(\frac{3}{4}e^{2}+\frac{3}{8}e^{4}\right)\cos(H'+H)\frac{\sin(H'-H)}{(H'-H)}\right.$$
$$\left.+\frac{9}{16}e^{4}\cos^{2}(H'+H)\frac{\sin^{2}(H'-H)}{(H'-H)^{2}}-\frac{15}{128}e^{4}\cos 2(H'+H)\frac{\sin 2(H'-H)}{(H'-H)}\right].$$

Dans cette expression, $(H'-H)$, qui est l'amplitude de l'arc A, doit être réduite en parties du rayon (art. 91), puisque π y désigne la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité. Mais à cause de $e^{2}=2\alpha-\alpha^{2}$ (art. 170), on a, en fonction de l'aplatissement,

$$\mu=C\left(\frac{A}{H'-H}\right)\left[1+\frac{3}{2}\alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sin(H'-H)\cos(H'+H)}{(H'-H)\sin 1''}\right.$$
$$+\frac{9}{4}\alpha^{2}\frac{\sin^{2}(H'-H)\cos^{2}(H'+H)}{(H'-H)^{2}\sin^{2}1''}$$
$$\left.-\frac{15}{32}\alpha^{2}\frac{\sin 2(H'-H)\cos 2(H'+H)}{(H'-H)\sin 1''}\right];$$

alors l'amplitude $H'-H$ étant exprimée en secondes de degrés sexagésimaux, l'on a, à cause de $C=\frac{0,00004432\pi}{\sin 1''}$,

$$\log C=1,4470587,5.$$

Un autre arc A' donnerait une autre valeur de μ; ainsi, la combinaison de ces deux valeurs fournirait l'aplatissement α et le mètre μ. C'est de cette manière que M. Delambre a procédé en pareille circonstance (*Base du Système métrique*, tom. 3, pag. 102).

Le milieu du grand arc du méridien, mesuré en France, tombant à peu près à la latitude de 45°, il s'ensuit que la détermination du mètre est presque indépendante de l'aplatissement. En effet, peu s'en faut que $H'+H$ ne soit de 90°, et que par conséquent $\cos(H'+H)$ ne soit nul.

179. Supposons, pour seconde application, que l'on veuille calculer la valeur de Q, en partant des mesures exécutées en France, et prenant pour aplatissement $\alpha = \frac{1}{334}$, trouvé ci-dessus, auquel cas $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{667}{(334)^2} = 0{,}00597058$, et $\log e^2 = 7{,}77663289$; on aura

le 1er terme sous la parenthèse	=	1,000000000
le 3e terme	=	0,000008192
le 4e	=	0,000000035
Somme....		1,000008227
et le 2e terme.....	=	−0,000187349
Ainsi le facteur sous la parenth.	=	0,999820878 = 1 − 0,000179122;

et comme $A = 551584^t{,}72$, $\varphi = 10^t{,}748663$, il s'ensuit que

$$Q = 5130739^t{,}6952, \text{ ou en nombre rond, } Q = 5130740^t.$$

C'est ce résultat même que la Commission des poids et mesures a obtenu; ainsi le mètre, qui est la 10000000ième partie du quart du méridien, $= 443^{lig}{,}296$. Cette longueur du mètre définitif est en effet celle qui est consacrée par les lois françaises : cependant, les derniers résultats de M. Delambre diffèrent un peu de ceux de la Commission; puisque, selon ce célèbre astronome, il résulte de la combinaison qu'il a faite lui-même des arcs de méridien mesurés à l'équateur et en France, que l'aplatissement de la Terre est $\frac{1}{309}$ au lieu de $\frac{1}{334}$. Les raisons qui l'ont engagé à modifier les élémens des calculs précédens, se trouvent exposées dans le troisième volume de la *Base du Système métrique*, page 112 : elles résultent d'une révision sévère des calculs de l'arc mesuré par Bouguer et Lacondamine, et de ceux de l'arc compris entre Dunkerque et Barcelonne. Quoi qu'il en soit, c'est toujours au mètre légal, qui est représenté par une règle de platine soumise à la température de la glace fondante, et dont la valeur est

de $443^{lig},296$ de la toise du Pérou, prise à 13° du thermomètre de Réaumur, que l'on doit rapporter toutes les mesures géodésiques.

180. Voici les élémens définitifs dont M. Delambre a fait usage pour déterminer l'aplatissement de la Terre, le mètre et le quart du méridien.

L'arc à l'équateur réduit à l'horizon de la mer, d'après les mesures de Bouguer et de Lacondamine..... $A' = 176877^t$
Lat. bor., d'après ces deux académiciens... $\Lambda' = +\ 0°\ 2'31''$
Latitude australe, *idem*..... $\Lambda = -\ 3°\ 4'32''$.

L'arc de France, par MM. Delambre et Méchain, réduit de même à l'horizon de la mer..... $A' = 551585^t,6$
Latitude de Dunkerque..... $H' = 51°\ 2'\ 9'',2$
Latitude de Montjoui (par un milieu)... $H = 41°21'46'',58$.

Appliquant ces données à la dernière formule de l'art. 178, on trouve, en calculant chaque terme séparément à l'aide des logarithmes à 7 décimales :

Par les opérations du Pérou,

$$\mu = 441^{lig},1853 + 660^t,5246\alpha + 908^t,5003\alpha^2;$$

Par celles de France,

$$\mu = 443^{lig},4134 - 27,70669\alpha + 394,2950\alpha^2;$$

de là

$$\alpha = 0,00323743 - 0,7471405\alpha^2 = 0,0032296 = \frac{1}{309,6},$$

au lieu de $\frac{1}{308,6}$ que M. Delambre avait trouvé, par suite d'une petite erreur qui s'était glissée dans sa formule;

et $$\mu = 443^t,328032 = 0^t,5131111,4$$

D'après la commission (art. 179).. $0,5130740,0$
Différence..... $371,4$;

le quart du méridien est donc de 371 toises plus grand que par les premiers calculs. Cette manière de procéder est plus simple que celle de l'art. 177.

Les motifs qui ont déterminé à déduire l'aplatissement de la Terre et le mètre, de la comparaison des arcs de méridien mesurés en France et au Pérou, sont fondés sur ce que ces arcs réunissent, sous le rapport de l'exactitude, toutes les conditions requises, et que

leur éloignement rend en outre leur différence de courbure plus sensible.

181. Maintenant, de l'équation $Q = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}} q \cdot \frac{1}{2}\pi$, π étant toujours la demi-circonférence d'un cercle ayant l'unité pour rayon, l'on tire

$$a = \frac{2Q}{\pi q (1-e^2)(1+n)^{\frac{3}{2}}};$$

mais (art. 173 et 176)

$$n = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} + \frac{e^6}{8}, \quad n^2 = \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4}e^6, \quad q = 1 + \frac{15}{16}\left(\frac{e^4}{4} + \frac{e^6}{4}\right),$$

en se bornant aux termes de l'ordre e^6; partant

$$a = \frac{2Q}{\pi}\left(1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{7}{64}e^4 + \frac{15}{256}e^6 \ldots\right) = \frac{2Q}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{1}{32}\alpha^3\right),$$

et

$$b = \frac{2Q}{\pi}\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{9}{64}e^4 - \frac{23}{256}e^6 \ldots\right) = \frac{2Q}{\pi}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{5}{16}\alpha^2 - \frac{5}{32}\alpha^3\right);$$

puis prenant les logarithmes de part et d'autre,

$$\log a = \log \frac{2Q}{\pi} + M\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{16}\alpha^2 - \frac{1}{48}\alpha^3\right),$$

$$\log b = \log \frac{2Q}{\pi} - M\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{7}{16}\alpha^2 + \frac{17}{48}\alpha^3\right):$$

formules dans lesquelles $\log M = 9,6377843$.

Si l'on fait $Q = 10000000^{mètr}$, on aura

$$\log \frac{2Q}{\pi} = 6,80388\ 01230,$$

et si l'on emploie l'aplatissement $\frac{1}{334}$, on aura

$$a = 6375739^m, \qquad \log.a = 6,80453\ 0507,$$
$$b = 6356649^m, \qquad \log.b = 6,80322\ 8274;$$

par suite

$$\begin{aligned}
\log \rho = 6,8038779 27 &\ - 0,00195\ 33480 \cos 2\lambda \\
&\ + 0,00000\ 14643 \cos 4\lambda \\
&\ - 0,00000\ 000144 \cos 6\lambda, \\
\log N = 6,8051811363 &\ - 0,00065\ 11160 \cos 2\lambda \\
&\ + 0,00000\ 04881 \cos 4\lambda \\
&\ - 0,00000\ 000048 \cos 6\lambda, \\
\log r = 6,8038808 56 &\ + 0,00065\ 11131 \cos 2\lambda \\
&\ - 0,00000\ 14642 \cos 4\lambda \\
&\ + 0,00000\ 000328 \cos 6\lambda.
\end{aligned}$$

Pour l'aplatissement $\alpha = \frac{1}{308,65} = 0,00324$, M. Delambre a trouvé

$$\log a = 6,80458\ 39646,$$
$$\log b = 6,80317\ 45662,$$
$$\log \frac{b}{a} = 9,99859\ 06016.$$

Dans la même hypothèse, un arc s, commençant à l'équateur et terminé à la latitude H exprimée en grades, a pour expression

$$s = 100000^m.H - 15494^m,94 \sin 2H + 15^m,71 \sin 4H - 0^m,02 \sin 6H;$$

puisque, par ce qui précède, on a en général

$$s = Q\left\{\frac{H}{100^g} - \left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{15}{64}\alpha^3\right)\frac{\sin 2H}{\pi} + \frac{15}{32}(\alpha^2 + \alpha^3)\frac{\sin 4H}{\pi} - \frac{35}{192}\alpha^3\frac{\sin 6H}{\pi}\right\}.$$

Si au contraire la latitude est exprimée en degrés, on a

$$s = 111111^m,11111.H - 15494^m,94 \sin 2H + 15^m,71 \sin 4H - 0^m,02 \sin 6H.$$

182. Lorsque H vaut un quadrant, on a $s = Q$; dans ce cas, l'expression analytique de Q, trouvée à l'art. 181, se développe en une série régulière et très remarquable, comme nous allons le faire voir.

D'abord à cause de

$$Q = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\frac{\pi}{2}.q \text{ et } b^2 = a^2(1-e^2) = a^2\left(\frac{1-n}{1+n}\right),$$

on a

$$Q = a(1+n)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1-n}{1+n}\right)\frac{\pi}{2}.q = a\frac{\pi}{2}q\frac{(1-n^2)}{(1+n)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= a\frac{\pi}{2}q\left(1-\frac{e^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(1-n^2);$$

mais (art. 173)

$$q = 1 + \frac{3.5}{4^2}n^2 + \frac{3.5.7.9}{4^2.8^2}n^4 + \frac{3.5.7.9.11.13}{4^2.8^2.12^2}n^6 + \frac{3.5.7.9.11.13.15.17}{4^2.8^2.12^2.16^2}n^8 \ldots$$

Par conséquent,

$$q(1-n^2) = 1 - \frac{1}{4^2}n^2 - \frac{1.3.5}{4^2.8^2}n^4 - \frac{1.3.5.7.9}{4^2.8^2.12^2}n^6 - \frac{1.3.5.7.9.11.13}{4^2.8^2.12^2.16^2}n^8 \ldots;$$

et enfin

$$Q = a\left(1-\frac{e^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4^2}n^2-\frac{1.3.5}{4^2.8^2}n^4-\frac{1.3.5.7.9}{4^2.8^2.12^2}n^6-\frac{1.3.5.7.9.11.13}{4^2.8^2.12^2.16^2}n^8\ldots\right).$$

Lorsque $b=0$, on a $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1$, $n=\frac{e^2}{2-e^2}$, et $Q=a$; partant

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}=1-\frac{1}{4^2}-\frac{1.3.5}{4^2.8^2}-\frac{1.3.5.7.9}{4^2.8^2.12^2}-\frac{1.3.5.7.9.11.13}{4^2.8^2.12^2.16^2}-\ldots.$$

C'est aussi ce que l'on trouve à l'aide d'une valeur générale du quart d'ellipse, donnée par M. Legendre dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences,* pour l'année 1786.

183. La methode par laquelle je suis parvenu à réduire en séries procédant suivant les multiples des cosinus de la latitude, les logarithmes des diverses lignes du sphéroïde terrestre, est sur-tout usitée en Astronomie, et dans tous les cas où elle peut rendre les intégrations plus faciles, ou bien lorsque l'on veut calculer les termes d'une série convergente, indépendamment des tables de logarithmes. Mais l'emploi de ces tables permet de développer tout simplement les fonctions $\frac{1}{(1+n\cos z)^\mu}$ et $\log(1+n\cos z)^\mu$, en séries procédant suivant les puissances des cosinus de l'angle z; parce que l'évaluation de leurs termes ne se fait pas avec moins d'exactitude. On pourrait, par exemple, calculer la valeur du logarithme de la normale N, au moyen de la série suivante :

$$\log N = \log a + \frac{1}{2}\log(1+n)$$
$$-\frac{1}{2}M\left(n\cos 2H-\frac{n^2}{2}\cos^2 2H+\frac{n^3}{3}\cos^3 2H-\ldots\right),$$

ou même de cette autre

$$\log N = \log a + \frac{1}{2}M\left(e^2\sin^2 H+\frac{e^4}{2}\sin^4 H+\frac{e^6}{3}\sin^6 H+\ldots\right),$$

qui dérive de l'une des équations (4) de l'art. 167. On aurait par le même procédé,

$$\log \rho = \log a + \log(1-e^2)$$
$$+\frac{3}{2}M\left(e^2\sin^2 H+\frac{e^4}{2}\sin^4 H+\frac{e^6}{3}\sin^6 H+\ldots\right).$$

Cependant, il importe, dans la pratique, de choisir parmi les séries d'une même expression, celles qui convergent le plus rapidement.

CHAPITRE XIV.

Continuation de la recherche des expressions analytiques des diverses lignes du sphéroïde terrestre.

184. On s'est proposé, à l'art. 177, d'exprimer un arc d'ellipse en fonction des latitudes de ses extrémités; mais, dans la pratique de la Géodésie, il est quelquefois plus commode, lorsque cet arc a une petite amplitude, de l'avoir en fonction de son rayon de courbure.

Soit A un arc du méridien, U son amplitude, H la latitude de son extrémité sud, et ρ son rayon de courbure au même point; on a en géneral, par le théorème de Maclaurin,

$$A=\left(\frac{dA}{dH}\right)U+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2A}{dH^2}\right)U^2+\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3A}{dH^3}\right)U^3+\ldots;$$

les valeurs des coefficiens différentiels étant déterminées pour le cas où $U=0$. Mais par l'art. 170, $\left(\frac{dA}{dH}\right)=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}=\rho$; si donc l'on calcule les coefficiens différentiels suivans, en ne conservant que les termes en e^2, on trouvera aisément

$$\text{(I)}\ A=\rho U+\frac{3}{2}\frac{1}{2}e^2\rho\frac{\sin 2H}{1-e^2\sin^2 H}U^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2.3}e^2\rho\frac{\cos 2H}{1-e^2\sin^2 H}U^3$$
$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{2^2}{2.3.4}e^2\rho\frac{\sin 2H}{1-e^2\sin^2 H}U^4-\ldots;$$

série régulière et qu'on pourrait continuer à volonté. Or, il est remarquable que tous les termes en U^2, U^4, $U^6\ldots$ forment cette suite :

$$V=\frac{3}{2}\frac{e^2\rho}{2^2}\cdot\frac{\sin 2H}{1-e^2\sin^2 H}\left[\frac{(2U)^2}{2}-\frac{(2U)^4}{2.3.4}+\frac{(2U)^6}{2.3.4.5.6}-\ldots\right];$$

tandis que les termes en U^3, U^5, $U^7\ldots$ forment celle-ci :

$$V'=\frac{3}{2}\frac{e^2\rho}{2^2}\cdot\frac{\cos 2H}{(1-e^2\sin^2 H)}\left[\frac{(2U)^3}{2.3}-\frac{(2U)^5}{2.3.4.5}+\frac{(2U)^7}{2.3.4.5.6.7}-\ldots\right];$$

ainsi, en négligeant les termes en e^4, on a

$$V=\tfrac{3}{8}e^2\rho\sin 2H[1-\cos 2U],\quad V'=\tfrac{3}{8}e^2\rho\cos 2H[2U-\sin 2U];$$

et partant, sous forme finie,

$$\begin{aligned}A&=\rho U+\tfrac{3}{8}e^2\rho[\sin 2H(1-\cos 2U)+\cos 2H(2U-\sin 2U)]\\&=\rho U+\tfrac{3}{8}e^2\rho[\sin 2H-\sin 2(H+U)+2U\cos 2H].\end{aligned}$$

Mais si H et H' sont les latitudes des extrémités de A, on a $U=H'-H$, et par conséquent

$$A=\rho(H'-H)\left[1+\frac{3}{4}e^2\cos 2H-\frac{3}{4}e^2\frac{\sin U\cos(H'+H)}{U}\right].$$

D'ailleurs

$$\sin(H'-H)=U\left(1-\frac{U^2}{2.3}+\ldots\right),$$

$$\cos(H'-H)^{\frac{1}{3}}=\left(1-\frac{U^2}{2}+\ldots\right)^{\frac{1}{3}}=1-\frac{U^2}{2.3}\ldots;$$

ainsi, on a définitivement, en prenant $H'-H$ en degrés sexagésimaux,

$$A=\frac{\pi\rho}{180^\circ}(H'-H)\left[1+\frac{3}{4}e^2\cos 2H-\frac{3}{4}e^2\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H)\cos(H'+H)\right];$$

c'est aussi ce que donnerait, avec un peu d'attention, la 3e formule de l'art. 177. Il est évident qu'il faudrait substituer 200g à la place de 180°, si les latitudes étaient exprimées en grades.

Faisant $U=1^\circ$, et de plus $e=\sin I$, ce qui est permis, puisque e est une fraction moindre que l'unité; la série (I) ou la formule précédente donnera assez exactement, pour l'arc M d'un degré du méridien,

$$(m)\qquad M=\frac{a\pi\cos^2 I}{180^\circ(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}\left(1+\frac{3}{4}\frac{\pi}{180^\circ}\tang^2 I\sin 2H\right);$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre. Si H désignait la latitude de l'extrémité nord, il faudrait prendre $\frac{\pi}{180}$ négativement.

On déduit quelquefois l'excentricité de la Terre de la mesure de deux degrés M, M' de méridien, dont les latitudes moyennes diffèrent entre elles sensiblement; mais à la formule usitée alors, on peut substituer la suivante, qui est plus exacte. Soient H et H' les latitudes boréales de leurs extrémités sud; on aura, en vertu de la formule (m) combinée avec son analogue,

$$\sin^2 I = \frac{1 - \left(\frac{M'}{M}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sin^2 H - \left(\frac{M'}{M}\right)^{\frac{2}{3}} \sin^2 H' - \frac{\pi}{360}\left[\sin 2H' - \left(\frac{M'}{M}\right)^{\frac{2}{3}} \sin 2H\right]};$$

Supprimez, dans le dénominateur, les termes en π, et considérez H, H' comme des latitudes moyennes, vous aurez la formule connue. Lorsque, dans notre hypothèse, H est la latitude de l'extrémité nord de M, on prend $\sin 2H$ négativement : même observation pour H'.

Sin I étant trouvé, on a $e = \sin I$, et par suite, aplatissement $\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 2\sin^2 \frac{1}{2} I$.

185. La méthode employée ci-dessus, pour développer un arc en série ordonnée suivant les puissances de son amplitude, s'applique également au problème inverse. En effet, on a généralement

$$U = \left(\frac{dH}{dA}\right) A + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2H}{dA^2}\right) A^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3H}{dA^3}\right) A^3 + \ldots;$$

mais

$$\left(\frac{dH}{dA}\right) = \frac{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} = \frac{1}{\varrho};$$

cherchant donc les autres coefficiens différentiels, et ne conservant que les termes en e^2; puis faisant attention que $e^2 \frac{a^2}{b^2} = \tang^2 I$, et que $N = \rho' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$, on obtiendra

$$\text{(II)} \quad U = \frac{A}{\varrho} - \frac{3}{4} \tang^2 I \sin 2H . \frac{A^2}{\varrho\varrho'} - \frac{3}{2} . \frac{2}{2.3} \tang^2 I \cos 2H . \frac{A^3}{\varrho^2\varrho'}$$
$$+ \frac{3}{2} . \frac{2^2}{2.3.4} \tang^2 I \sin 2H . \frac{A^4}{\varrho^3\varrho'} + \ldots;$$

série encore régulière, et dont la loi des termes est en évidence. Jamais, dans la pratique, on n'a besoin de tenir compte du quatrième terme.

Si l'on bornait la série au terme en A^3, et que l'on conservât la quatrième puissance de l'excentricité, on trouverait

$$\text{(III)} \quad U = \frac{A}{\varrho} - \frac{3a^2e^2 \sin 2H}{4b^2\varrho\varrho'} A^2$$
$$- \frac{a^2e^2}{2b^2}\left[\frac{\cos 2H}{\varrho^2\rho'} - \frac{e^2 \sin^2 2H}{4\varrho}\left(\frac{3a^2}{b^2\varrho'^2} + \frac{\varrho'}{a^2\varrho}\right)\right] A^3;$$

mais comme, par cette formule, l'amplitude U serait donnée en parties de l'unité, il faudrait, pour l'avoir en grades, multiplier tous les termes du second membre par $\frac{200}{\pi}$, π ayant la même signification que ci-dessus.

186. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que le rayon de courbure de l'ellipse génératrice de l'ellipsoïde de révolution : occupons-nous de la recherche de celui d'une section faite dans ce corps, par un plan mené d'une manière quelconque suivant une des normales ; et, pour cet effet, désignons par x', y' les coordonnées rectangles d'un point de la limite de cette section verticale; prenons pour axe des x' la normale à un point du méridien elliptique ayant H pour latitude; plaçons l'origine des x' au point d'intersection du rayon de l'équateur et de la normale dont il s'agit; enfin, désignons par x, y, z les coordonnées rectangles d'un point quelconque de l'ellipsoïde de révolution, de manière que le rayon a de l'équateur soit l'axe des x, b celui du pôle l'axe des y, et la droite perpendiculaire au plan des xy l'axe des z. Cela posé, l'équation de l'ellipsoïde, rapportée au centre, sera

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2(z^2 + x^2) = a^2b^2;$$

or, pour trouver en général l'équation de la section faite dans ce corps, il faut, comme l'on sait, substituer à x, y, z les valeurs suivantes :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = n + x' \cos H + y' \sin H \cos \theta, \\ y = x' \sin H - y' \cos H \cos \theta, \\ z = y' \sin \theta, \end{cases}$$

dans lesquelles θ est l'angle que le plan sécant fait avec le méridien xy, et n la distance du centre de l'ellipsoïde au point où la normale rencontre le rayon de l'équateur (art. 167), auquel cas $n = \frac{ae^2 \cos H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$; e désignant toujours le rapport de l'excentricité au demi-grand axe. Ces substitutions faites, on a un résultat de cette forme :

$$(3) \qquad mx'^2 + ny'^2 - px'y' + qx' + ry' = s;$$

c'est l'équation à l'ellipse, ou celle de l'intersection cherchée. Il est facile de voir que l'on a

$$(4) \quad \begin{cases} m = a^2 \sin^2 H + b^2 \cos^2 H, & n = b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 H \cos^2 \theta, \\ p = 2(a^2 - b^2) \sin H \cos H \cos \theta, & q = 2nb^2 \cos H, \\ r = 2nb^2 \sin H \cos \theta, & s = (a^2 - n^2) b^2. \end{cases}$$

Lorsque cette ellipse est perpendiculaire au méridien, on a $\theta = \frac{1}{2}\pi$ et pour lors $\cos\theta = 0$; circonstance qui réduit l'équation (3) à la suivante :

$$(5)\quad (a^2 \sin^2 H + b^2 \cos^2 H)x'^2 + 2\eta b^2 \cos H . x' + b^2 y'^2 = (a^2 - \eta^2) b^2,$$

et de laquelle, en faisant $y' = 0$, l'on tire

$$x' = \frac{-b^2\eta \cos H \pm \sqrt{b^2(a^2-\eta^2)(a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H) + b^4\eta^2\cos^2 H}}{a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H}.$$

Soient donc x'_1, x'_2 ces deux racines, abstraction faite de leurs signes; on trouvera, avec un peu d'attention, et après avoir mis pour η sa valeur rapportée ci-dessus,

$$x'_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}},\quad x'_2 = \frac{a(1-e^2)(1+e^2\cos^2 H)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}(1-e^2\cos^2 H)};$$

la première racine est la normale N' (art. 167), et la seconde racine, la partie opposée de la corde $x'_1 x'_2$.

Soient en outre a' le demi-grand axe de l'ellipse dont il s'agit, et b' son demi-petit axe; on aura

$$b' = \frac{x'_1 + x'_2}{2} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}(1-e^2\cos^2 H)}.$$

Pour trouver le demi-grand axe, on chassera le second terme en x' de l'équation (5), et cela en faisant $x' = x'' - \frac{b^2\eta\cos H}{a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H}$; de cette manière on aura

$$(a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H)x''^2 + b^2 y'^2 = \frac{b^2(a^2-\eta^2)(a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H) + b^4\eta^2\cos^2 H}{a^2\sin^2 H + b^2\cos^2 H},$$

ou, pour abréger,

$$mx''^2 + ny'^2 = P.$$

Mais à $x'' = 0$ correspond $y' = a'$; partant

$$a' = \frac{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}(1-e^2\cos^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{P}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si au contraire on faisait $y' = 0$, on aurait $x'' = b'$, et l'on retomberait sur la valeur du demi-axe trouvée ci-dessus, ou ce qui est de même, on aurait

$$b' = \left(\frac{P}{m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, désignant par e' l'excentricité de cette même ellipse, on aura

$$e'^2 = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = \frac{m-n}{m},$$

et à cause des valeurs précédentes,

$$e'^2 = \frac{e^2 \sin^2 H}{1 - e^2 \cos^2 H}.$$

187. Maintenant, pour avoir l'expression générale du rayon R de courbure de la section que l'on considère, quelle que soit d'ailleurs la valeur de l'angle θ, nous ferons usage de la formule connue, savoir :

$$R = \frac{-\left(1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x'}{dy'^2}},$$

dans laquelle la différentielle dy' est constante; et pour introduire ici les valeurs de $\frac{dx'}{dy'}$ et $\frac{d^2x'}{dy'^2}$, nous différencierons deux fois de suite l'équation (3); mais comme nous avons en vue de trouver le rayon de courbure à l'origine de la normale à l'ellipse du méridien, nous ferons alors $y' = 0$ dans le résultat de la différenciation, en sorte qu'il viendra

$$\frac{dx'}{dy'} = -\frac{(r - px')}{q + 2mx'}, \quad \frac{d^2x'}{dy'^2} = \frac{-2m\left(\frac{dx'^2}{dy'^2}\right) + 2p\left(\frac{dx'}{dy'}\right) - 2n}{q + 2mx'};$$

et puisque la section est faite suivant cette normale, on a (art. 167)

$$x' = \frac{b^2}{a(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = N'.$$

Il résulte de là et des relations (4), que la quantité $r - px' = 0$; donc quand le rayon de courbure cherché coïncide avec la normale à l'ellipse du méridien, on a simplement

$$R = \frac{q + 2mx'}{2n}.$$

Remplaçant maintenant m, q, n, x' par leurs valeurs précédentes, on a, pour une section verticale quelconque,

$$(6) \qquad R = \frac{ab^2}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}} \left[b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 H \cos^2 \theta\right]}.$$

Soient ρ et ρ' le rayon de courbure du méridien et celui de l'arc perpendiculaire au même point; on aura le premier en faisant $\theta = 0$, et le second en faisant $\theta = 100^g$: ainsi, comme l'on sait d'ailleurs, les rayons de plus petite et de plus grande courbure de la Terre sont

$$\rho = \frac{b^2}{a(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}.$$

On voit par là, que la valeur de ρ' est égale à celle de la normale N (art. 167).

Afin de donner à l'expression (6) une forme symétrique et dépendante de ρ, ρ', on pourra d'abord écrire

$$R = \frac{\varrho' b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2 H \cos^2 \theta} = \frac{\varrho' b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2 \theta - (a^2 - b^2)\sin^2 H \cos^2 \theta},$$

et mettre $b^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta$ au lieu de b^2; ce qui donnera

$$R = \frac{\varrho' b^2}{a^2 \cos^2 \theta (1 - e^2 \sin^2 H) + b^2 \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\varrho' b^2}{a(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{a \cos^2 \theta}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} + \frac{b^2 \sin^2 \theta}{a(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}} \right]},$$

enfin,

$$(7) \qquad R = \frac{\varrho \varrho'}{\varrho \sin^2 \theta + \varrho' \cos^2 \theta}.$$

Tel est le résultat auquel Euler est parvenu le premier, par une autre méthode analytique. Il exprime une propriété remarquable de l'ellipsoïde de révolution; mais cette propriété, commune aux surfaces courbes en général (*voy.* la théorie des osculations de ces surfaces, *Calcul différentiel* de M. Lacroix, tom. I, pag. 372, 2e édit.), se démontre très directement, par l'analyse précédente.

188. Une ligne géodésique menée dans une direction quelconque, se confondant sensiblement, dans une étendue de plusieurs degrés, avec la section verticale correspondante, ainsi qu'on le prouverait à l'aide des formules que nous donnerons par la suite, il s'ensuit que l'arc d'un degré d'une section perpendiculaire au méridien, peut être pris pour l'arc de plus courte distance ayant même amplitude et même direction. Cela posé, si l'on désigne par D, M et P le degré oblique, le degré du méridien et celui qui lui est perpendiculaire, on pourra, dans l'expression (7), remplacer R, ρ et ρ' par D, M et P,

puisque les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons; on aura donc

$$D = \frac{M.P}{M\sin^2\theta + P\cos^2\theta} = \frac{M}{1 - \left(\frac{P-M}{P}\right)\sin^2\theta},$$

ou réduisant en série, et n'en conservant que les deux premiers termes, il viendra

$$(8) \qquad D = M\left(1 + \frac{P-M}{P}\sin^2\theta\right).$$

Quoique cette formule ne soit qu'approximative, puisque les arcs D, M, P, en vertu de la propriété des rayons de courbure, devraient être infiniment petits, cependant c'est ce qu'on peut proposer de mieux pour la pratique. Pour en faire usage, il faudrait connaître M et P. Or, nous avons déjà donné M en fonction de son rayon de courbure (art. 184) : cherchons à exprimer P d'une manière semblable. Dans cette vue, remarquons que si, dans la série (I) (art. cité), on suppose $H = 90°$, alors U sera négative, $\rho = \rho'$, et l'on aura simplement

$$M = \rho' U - \tfrac{1}{2} e^2 \rho' U^3 \ldots\ldots$$

Mais, par l'art. 186, l'origine d'un arc P' perpendiculaire au méridien est l'extrémité du petit axe de cet arc elliptique; ainsi, à cause de $\rho' = \frac{a}{(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$, et parce que e^2 se change en e'^2, on a en général

$$P' = \frac{\pi}{180}\rho' U\left(1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 H . \frac{\pi^2}{180^2} U^2\right).$$

Or, à la latitude de 49°, qui est à peu près celle de Paris, pour une amplitude U de 5° et un aplatissement de $\frac{1}{100}$, le second terme de cette valeur serait de 24^m environ, tandis que le troisième terme n'irait pas à un décimètre; on a donc la longueur du premier degré de l'arc P' censé mesuré, en prenant la valeur de $\frac{\pi}{180}\rho'$ de l'expression précédente. Soit P cette valeur; alors

$$(p) \qquad P = \frac{a\pi}{180(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant si l'on suppose que les longueurs M et P d'un degré du méridien et d'un degré perpendiculaire à la même latitude H, soient

connues, on pourra, par la combinaison des formules (m) et (p), déterminer l'excentricité de la Terre. En effet, on tire de ces deux formules, et à cause de $e^2 = \sin^2 I$,

$$\frac{M}{\cos^2 I\left(1 + \frac{3}{4}\frac{\pi}{180}\tang^2 I \sin 2H\right)} = \frac{P}{1 - \sin^2 I \sin^2 H};$$

par suite,

$$M \sin^2 I + M \cos^2 I - M \sin^2 I \sin^2 H$$
$$= P \cos^2 I + \frac{3}{4}\frac{\pi}{180} P \sin^2 I \sin 2H;$$

enfin, à cause de $\frac{P}{M} = 1$ à très peu près, on a

$$\tang^2 I = \frac{P - M}{M \cos^2 H\left(1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\tang H\right)},$$

ou bien

$$\frac{P - M}{M} = \tang^2 I \cos^2 H - \frac{3}{4}\frac{\pi}{180}\tang^2 I \sin 2H.$$

Mais le second terme de cette expression est évidemment très petit; si on le négligeait, on aurait la relation $\frac{P-M}{M} = \tang^2 I \cos^2 H$, donnée par M. Delambre, dans la *Connaissance des Tems* pour l'année 1818, pag. 252. Toutefois, il paraît convenable de conserver ce terme. Tang I étant trouvée par ce moyen, on aura $e = \sin I$, et par suite, aplatissement $\alpha = 2\sin^2 \frac{1}{2} I$, comme nous l'avons déjà dit (art. 184). Dans toutes ces formules, π désigne la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité. Bien entendu que si H était la latitude de l'extrémité nord de M, il faudrait, dans la dernière formule ci-dessus, faire $\frac{\pi}{180}$ négatif.

Si au lieu de connaître P, on connaissait l'arc Π d'un degré du parallèle à la même latitude, il est facile de s'assurer qu'on aurait

$$\Pi = \frac{a\pi \cos H}{180\,(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \text{ et par conséquent } \frac{\Pi}{\cos H} = P.$$

Nous pouvons actuellement donner à la relation (7) une forme toute nouvelle; il suffit pour cela de remplacer M par sa valeur (m), et de faire attention que $\frac{P-M}{P} = \frac{P-M}{M}\cdot\frac{M}{P} = \frac{P-M}{M}$ à fort peu près; on

aura en conséquence

$$(d)\quad D=\frac{\pi\varrho}{180}\left(1+\frac{3}{4}\frac{\pi}{180}\operatorname{tang}^2 I\sin 2H\cos^2\theta+\operatorname{tang}^2 I\cos^2 H\sin^2\theta\right).$$

189. Il est utile de connaître en général la différence des normales N, N' correspondantes aux latitudes H, H'. Pour l'avoir en série développée suivant les puissances de $H'-H=\Delta H$, soit

$$N'=f(\Delta H);$$

f étant le signe d'une fonction quelconque; on aura, par le théorème de Maclaurin,

$$N'=N+\left(\frac{dN'}{dH'}\right)\Delta H+\left(\frac{d^2N'}{dH'^2}\right)\frac{\Delta H^2}{2}+\left(\frac{d^3N'}{dH'^3}\right)\frac{\Delta H^3}{2.3}+\ldots;$$

les valeurs des coefficiens différentiels étant prises pour le point où $\Delta H=0$. Or, on a

$$N'=a\left[1+\tfrac{1}{2}e^2\sin^2 H'+\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}e^4\sin^4 H'+\text{etc}\ldots\right];$$

et si l'on fait attention qu'au point où $H'=H$, on a $N'=N$, les coefficiens différentiels, pris dans cette hypothèse, seront

$$\left(\frac{dN'}{dH'}\right)=a\left[e^2\sin H\cos H+\tfrac{1}{2}.3\,e^4\sin^3 H\cos H\ldots\right],$$
$$\left(\frac{d^2N'}{dH'^2}\right)=a\left[e^2\cos^2 H-e^2\sin^2 H+\tfrac{9}{2}e^4\sin^2 H\cos^2 H-\tfrac{3}{2}e^4\sin^4 H\ldots\right].$$

Mais à cause de $e^2=2\alpha-\alpha^2$, α étant le rapport de l'aplatissement de la Terre au demi-grand axe, il s'ensuit que e^2 est de l'ordre de cet aplatissement, comme nous l'avons déjà fait observer (art. 170). Si donc ΔH est de cet ordre, et qu'on rejette les termes supérieurs au troisième ordre, on aura

$$(n)\quad N'-N=\tfrac{1}{2}ae^2\sin 2H.(1+\tfrac{3}{2}e^2\sin^2 H)\Delta H+\tfrac{1}{2}ae^2\cos 2H.\Delta H^2,$$

ou en se bornant au terme du second ordre, ainsi que cela est souvent permis dans la pratique,

$$(n')\qquad N'-N=\tfrac{1}{2}ae^2\Delta H\sin 2H.$$

Il est à remarquer que quand $H'<H$, la différence ΔH est négative,

ainsi, pour avoir égard à cette circonstance, il faudrait, dans la série (n), changer le signe des termes où ΔH est affectée d'une puissance impaire.

190. Voici encore quelques conséquences de la théorie précédente.

Soit S la longueur d'un arc exprimé en grades, et faisant partie d'un parallèle quelconque mené par un point dont la latitude est H; on aura, en désignant par x le rayon de ce parallèle, et par U son amplitude exprimée en grades,

$$S = \frac{2\pi x U}{400},$$

puis mettant pour x, sa valeur donnée à l'art. 167, il viendra

$$S = \frac{2\pi U a \cos H}{400\,(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \text{ et } \log S = \log (U \cos H) + \log F.$$

Il est d'abord évident que le facteur $\frac{2\pi a}{400\,(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = F$ a pour logarithme

$$\log F = \log \tfrac{1}{2}\pi - 2 + \log a - \tfrac{1}{2} \log (1 - e^2 \sin^2 H);$$

mais à cause de

$$a = \frac{10000000^{m}}{\frac{1}{2}\pi} \times \left(1 + \frac{1}{4} e^2 + \frac{7}{64} e^4 + \frac{15}{256} e^6\right),$$

l'on a

$$\log a = 7 - \log \tfrac{1}{2}\pi + \log \left(1 + \tfrac{1}{4} e^2 + \tfrac{7}{64} e^4 + \tfrac{15}{256} e^6\right),$$

et par suite, en développant en séries les logarithmes indiqués, il vient

$$\begin{aligned} \log F = {} & 5 \\ & + M\left[\left(\tfrac{1}{4} e^2 + \tfrac{7}{64} e^4 + \tfrac{15}{256} e^6\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} e^2 + \tfrac{7}{64} e^4 + \ldots\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{4} e^2 + \ldots\right)^3\right] \\ & + \tfrac{1}{2} M \left[e^2 \sin^2 H + \tfrac{1}{2} e^4 \sin^4 H + \tfrac{1}{3} e^6 \sin^6 H + \ldots\right]; \end{aligned}$$

M étant toujours le module des tables, ou 0,4342944819.

Si en outre on développe les puissances indiquées, et qu'on réduise, on trouvera

$$\begin{aligned} \log F = {} & 5 + M\left(\tfrac{1}{4} e^2 + \tfrac{5}{64} e^4 + \tfrac{7}{192} e^6\right) \\ & + M\left(\tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 H + \tfrac{1}{4} e^4 \sin^4 H + \tfrac{1}{6} e^6 \sin^6 H\right); \end{aligned}$$

puis si l'on change les puissances des sinus en cosinus d'arcs multiples (art. 91), on aura

$$\begin{aligned} 5 + M[(\tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{11}{64}e^4 + \tfrac{17}{192}e^6)] &- M(\tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{8}e^4 + \tfrac{1}{64}e^6)\cos 2H \\ &+ M(\tfrac{1}{32}e^4 + \tfrac{1}{32}e^6)\cos 4H \\ &- M\tfrac{1}{192}e^6 \cos 6H; \end{aligned}$$

enfin, en supposant $e^2 = \frac{667}{(334)^2}$, il viendra

$$\begin{aligned} \log F = 5{,}001301013 &- 0{,}0006511160 \cos 2H \\ &+ 0{,}0000004881 \cos 4H \\ &- 0{,}00000000048 \cos 6H. \end{aligned}$$

On obtiendrait aisément une vérification de cette formule, lorsque $H = 0$; car dans ce cas, $\log F$ se réduit à

$$\log \pi + \log a - \log 200 = 5{,}000650385,$$

et l'on sait que

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0{,}49714\ 9873 \\ \log a &= 6{,}80453\ 0508 \\ c.\log 200 &= 7{,}69897\ 0004 \\ \hline &\ 5{,}00065\ 0385; \end{aligned}$$

les deux membres de l'équation précédente sont donc identiques.

Si l'on prend les différences finies de cette équation, que l'on fasse $\Delta H = 0^s{,}10$, que H et H' soient deux latitudes consécutives, et que l'on se rappelle qu'en général

$$\cos \mu H - \cos \mu H' = 2\sin \tfrac{\mu}{2}(H' - H) \sin \tfrac{\mu}{2}(H' + H),$$

l'expression

$$\begin{aligned} \Delta \log F = &+ 0{,}0006511160 (\cos 2H - \cos 2H') \\ &- 0{,}0000004881 (\cos 4H - \cos 4H'), \end{aligned}$$

deviendra, à cause de $H' - H = \Delta H = 0^s{,}1$,

$$\begin{aligned} \Delta \log F = &+ 0{,}00065\ 11160 \times 0{,}00314\ 16 \sin (H + H') \\ &- 0{,}00000\ 04881 \times 0{,}00628\ 32 \sin 2(H + H') \\ = &\ 0{,}00000\ 20455 \sin(H + H') - 0{,}00000\ 000307 \sin 2(H + H'). \end{aligned}$$

Développons, par un procédé analogue, la valeur de S ci-dessus, et pour avoir l'expression du grade de longitude, faisons $U = 1^g$; on aura

$$1^g \text{ de longitude} = \frac{\frac{1}{2}\pi a \cos H}{100(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}:$$

mettant au lieu de a, sa valeur donnée plus haut, il viendra

$$\begin{aligned}
1^g \text{ longitude} &= \frac{10000000^m.(1 + \frac{1}{4}e^2 + \ldots)}{100} \cdot \frac{\cos H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \\
&= 100000^m (1 + \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{7}{64}e^4 + \tfrac{15}{256}e^6) \cos H \\
&\quad \times (1 + \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 H + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}e^4 \sin^4 H + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6}e^6 \sin^6 H) \\
&= 100000^m [(1 + \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{7}{64}e^4 + \tfrac{15}{256}e^6) \cos H \\
&\quad + (\tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{8}e^4 + \tfrac{7}{128}e^6) \sin^2 H \cos H \\
&\quad + (\tfrac{3}{8}e^4 + \tfrac{3}{32}e^6) \sin^4 H \cos H + \tfrac{5}{16}e^6 \sin^6 H \cos H],
\end{aligned}$$

ensuite n'employant que des cosinus d'arcs multiples, on aura

$$\begin{aligned}
1^g \text{ longitude} &= 100000 (1 + \tfrac{3}{8}e^2 + \tfrac{3}{16}e^4 + \tfrac{111}{1024}e^6) \cos H \\
&\quad - 100000 (\tfrac{1}{8}e^2 + \tfrac{13}{128}e^4 + \tfrac{77}{1024}e^6) \cos 3H \\
&\quad + 100000 (\tfrac{3}{128}e^4 + \tfrac{31}{1024}e^6) \cos 5H \\
&\quad - 100000 (\tfrac{5}{1024}e^6) \cos 7H \\
&= 100224^m,8874 \cos H - 75^m,1029 \cos 3H \\
&\quad + 0^m,0844 \cos 5H - 0^m,0001 \cos 7H.
\end{aligned}$$

Cette formule se vérifie comme la précédente, en faisant $H = 0$; car alors le second membre devient $= 100149^m,8688$, et c'est précisément ce que donne le premier membre, qui se réduit à $100000^m (1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{7}{64}e^4 + \frac{15}{256}e^6)$, et qui exprime la valeur du grade de l'équateur terrestre.

En prenant les différences finies, et faisant $\Delta H = 0^g,10$, on aura

$$\begin{aligned}
\Delta.\text{grade longit.} = 157^m,4330 \sin \tfrac{1}{2}(H + H') &- 0^m,3539 \sin \tfrac{3}{2}(H + H') \\
&+ 0^m,00066 \sin \tfrac{5}{2}(H + H').
\end{aligned}$$

Ces formules serviraient à vérifier les nombres de la table VII; mais pour qu'il y eût accord parfait, il faudrait introduire dans les séries ci-dessus l'aplatissement $\frac{1}{335}$ au lieu de $\frac{1}{334}$ que nous avons employé. On assujétirait à ce dernier aplatissement, les logarithmes insérés dans la seconde colonne de la table, en les augmentant tous de 0,0000040.

191. De la valeur générale de s, donnée à l'art. 181, l'on tire, entre les limites H, H', et en supposant $\alpha = \frac{1}{334}$,

$$\begin{aligned} s = 100000^m (H'-H) &- 28633^m,546 \sin(H'-H)\cos(H'+H) \\ &+ 26^m,830 \sin 2(H'-H)\cos 2(H'+H) \\ &- 0^m,03114 \sin 3(H'-H)\cos 3(H'+H); \end{aligned}$$

par conséquent, lorsque $H' = H + 1^g$, et que G désigne le grade de latitude, on a

1°. Pour l'aplatissement $\frac{1}{334}$,

$$\begin{aligned} G = 100000^m - 449^m,7525 \cos(H+H') &+ 0^m,842755 \cos 2(H+H') \\ &- 0^m,001467 \cos 3(H+H'); \end{aligned}$$

2°. Pour l'aplatissement $\frac{1}{308.65}$,

$$\begin{aligned} G = 100000^m - 486^m,76308 \cos(H+H') &+ 0^m,987138 \cos 2(H+H') \\ &- 0^m,001860 \cos 3(H+H'). \end{aligned}$$

En supposant au contraire les latitudes exprimées en degrés sexagésimaux, on aurait, dans les deux hypothèses ci-dessus d'aplatissement,

$$\begin{aligned} D = 111111^m,1111 - 499^m,725 \cos(H+H') &+ 0^m,93645 \cos 2(H+H') \\ &- 0^m,001630 \cos 3(H+H'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = 111111^m,1111 - 540^m,848 \cos(H+H') &+ 1^m,09682 \cos 2(H+H') \\ &- 0^m,002067 \cos 3(H+H'). \end{aligned}$$

Les différences premières des degrés décimaux sont donc

$$\Delta G = 14^m,1288 \sin 2H' - 0^m,05294 \sin 4H' + 0^m,00014 \sin 6H',$$
$$\Delta G = 15^m,2915 \sin 2H' - 0^m,06201 \sin 4H' + 0^m,00018 \sin 6H',$$

et celles des degrés sexagésimaux

$$\Delta D = 17^m,443 \sin 2H' - 0^m,06536 \sin 4H' + 0^m,00017 \sin 6H',$$
$$\Delta D = 18^m,878 \sin 2H' - 0^m,07656 \sin 4H' + 0^m,00022 \sin 6H'.$$

Voyez, pour de plus amples détails, le troisième volume de la *Base du Système métrique*, page 197, d'où les résultats précédens sont extraits en partie. On remarquera que j'ai eu soin cependant de rectifier les coefficiens numériques qui se trouvaient fautifs.

CHAPITRE XV.

Calculs des latitudes, longitudes et azimuts des objets terrestres.

192. Tous les sommets des triangles d'un réseau sont tellement liés entre eux, que si la position géographique de l'un d'eux était connue, c'est-à-dire sa latitude et sa longitude, et que la ligne géodésique qui joint ce sommet à un autre du réseau fût orientée, la position géographique de tous les points de ce réseau, et les azimuts des côtés seraient également connus. Le problème à résoudre en ce moment est donc celui-ci : La latitude et la longitude du point M (fig. 40) étant données, ainsi que l'azimut du point M' sur l'horizon de M, trouver tant la latitude et la longitude de ce second point, que l'azimut de M sur l'horizon de M'.

Avant que les méthodes géodésiques eussent été portées au degré de perfection où elles se trouvent maintenant, les géographes résolvaient cette question par la Trigonométrie sphérique seulement, en prenant pour rayon de la Terre, celui qui résulte du degré moyen dans la région du réseau. On conçoit en effet que si, par les points M, M', on mène les méridiens PM, PM', le point P sera le pôle de la Terre, et que dans le triangle sphérique $MM'P$ l'on connaîtra l'angle $M'MP$ ou l'azimut de M', ainsi que deux côtés, savoir : MM' ou un côté du réseau évalué en secondes (art. 130), et PM ou le complément de la latitude de M. On pourrait donc par les Analogies de Néper, déterminer l'angle $MM'P$, ou l'azimut du point M sur l'horizon de M', l'angle P ou la différence des méridiens, enfin le côté $M'P$ ou le complément de la latitude de M'; mais par ce moyen, l'on n'obtiendrait pas la latitude particulièrement avec assez de précision. Voici une autre méthode qui est de beaucoup préférable.

1re SOLUTION.

L'hypothèse de la sphéricité de la Terre ne pouvant manquer de simplifier la question, considérons une sphère d'un rayon égal à la

normale MN au point M donné sur la Terre elliptique, et les arcs de grand cercle pM, pM' comme les méridiens de M et de M' sur la sphère fictive; puis calculons la position géographique du point M', en résolvant le triangle sphérique pMM', non par les formules finies de l'art. 78, lesquelles ne donneraient pas assez de précision dans la pratique, à cause de la petitesse de la ligne géodésique MM', mais par les séries de l'art. 98, qui ont une exactitude indéfinie. Ensuite, nous examinerons l'erreur qui résulte de notre supposition.

Soit à cet effet H la latitude du point M; H' celle du point M'; P, P' les longitudes de ces mêmes points, ou les angles MPa, $M'Pa$; enfin V, V' les inclinaisons de la ligne géodésique $MM' = K$, ou de son prolongement sur les méridiens respectifs pM, pM'. On aura, en transportant cette notation dans le triangle sphérique ABC, résolu à l'art. 98, et en désignant par u le côté K réduit en parties du rayon,

$$\begin{aligned} a &= 100^g - H', & A &= V, \\ b &= 100^g - H, & B &= 200^g - V', \\ c &= u, & C &= P' - P; \end{aligned}$$

de là les séries (III), (I), (II) se changeront respectivement en ces trois autres,

$$(\alpha)\quad H' = H + u\cos V - \tfrac{1}{2}u^2 \sin^2 V \operatorname{tang} H,$$

$$(\beta)\quad P' = P + u\frac{\sin V}{\cos L} + u^2 \frac{\sin V \cos V \operatorname{tang} H}{\cos H},$$

$$(\gamma)\quad V' = V + u \sin V \operatorname{tang} H + u^2 \sin V \cos V . (\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 H).$$

Mais on est convenu, dans la pratique, de compter les azimuts et les longitudes du sud à l'ouest, et depuis 0^g jusqu'à 400^g. Soit alors Z l'azimut de M' sur l'horizon de M, et Z' l'azimut de M sur l'horizon de M', l'un et l'autre comptés à partir du sud; on aura, d'après la figure 40,

$$V = 200 - Z, \quad V' = 400 - Z';$$

ainsi les formules précédentes, dans lesquelles on supposera d'ailleurs u réduit en secondes (art. 91), deviendront

$$(a)\quad H' = H - u\cos Z - \tfrac{1}{2}u^2 \sin 1'' \sin^2 Z \operatorname{tang} H,$$

$$(b)\quad P' = P + \frac{u \sin Z}{\cos H} - \tfrac{1}{2}u^2 \sin 1'' \sin 2Z . \frac{\operatorname{tang} H}{\cos H},$$

$$(c)\quad Z' = 200^g + Z - u \sin Z \operatorname{tang} H + \tfrac{1}{4}u^2 \sin 1'' \sin 2Z (1 + 2\operatorname{tang}^2 H).$$

La latitude H' étant trouvée à l'aide de la première formule, on peut s'en servir pour déterminer P' et Z'; mais il faut, dans ce cas, introduire H' dans les valeurs de ces deux inconnues : or, c'est à quoi l'on parviendra tout d'abord; car d'une part, le triangle sphérique pMM' donnant

$$\sin(P'-P)=\frac{\sin u \sin Z}{\cos H'},$$

on a, à cause de la petitesse de u,

$$(b') \qquad P'=P+\frac{u\sin Z}{\cos H'};$$

d'autre part, dans le même triangle, l'on a, en vertu de l'art. 78,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(M+M')=\cot\tfrac{1}{2}(P'-P)\frac{\cos\frac{1}{2}(H-H')}{\sin\frac{1}{2}(H+H')};$$

et puisque $\cot=\frac{1}{\operatorname{tang}}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\cot\tfrac{1}{2}(M+M')&=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(P'-P)\frac{\sin\frac{1}{2}(H+H')}{\cos\frac{1}{2}(H-H')}\\&=\operatorname{tang}[1^{\text{q}}-\tfrac{1}{2}(M+M')];\end{aligned}$$

mais $1^{\text{q}}-\frac{1}{2}(M+M')$ et $P'-P$ étant toujours des angles très petits, on a simplement, à cause de $M+M'=Z'-Z$,

$$(c') \qquad Z'=200^{\text{g}}+Z-(P'-P)\frac{\sin\frac{1}{2}(H+H')}{\cos\frac{1}{2}(H-H')}.$$

193. Les formules (a), (b'), (c') sont d'une très grande simplicité, aussi les ingénieurs-géographes en font-ils un fréquent usage. On remarquera cependant que la première ne donne la latitude du point M' que par approximation; car la véritable latitude cherchée est l'angle $M'N'Q'$ que la normale $M'N'$ sur le sphéroïde terrestre, considéré comme un ellipsoïde de révolution, fait avec le plan de l'équateur dont la trace sur le méridien PE est la droite CE; au lieu que la latitude déterminée par la formule (a), est représentée par l'angle que l'oblique $M'N$ fait avec NQ; $N'Q'$ et NQ étant supposés deux plans parallèles à CE. La correction de latitude, que nous désignerons par ψ, est donc l'angle $NM'N'$, puisque dans le triangle $N'M'R$ l'angle extérieur $M'RQ'=H'$ vaut la somme des deux intérieurs opposés $NM'N'$, $M'N'Q'$.

Afin d'évaluer ψ d'une manière suffisamment exacte, supposons que l'oblique $M'N=MN$, ce qui est sensiblement vrai, à cause de

la petitesse de la ligne géodésique MM'. Or, par l'art. 167,

$$\text{la normale } MN = N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \text{ et } CN = e^2 N \sin H;$$

d'ailleurs le triangle $NM'N'$ donne

$$\sin NM'N = \sin \psi = \frac{NN' \sin PN'M'}{M'N}$$
$$= \frac{NN' \cos (H' - \psi)}{N};$$

et comme $CN' = e^2 N \sin H'$ à fort peu près, il s'ensuit que

$$NN' = CN - CN' = e^2 N (\sin H - \sin H');$$

partant

$$\sin \psi = 2e^2 \sin \left(\frac{H - H'}{2}\right) \cos \left(\frac{H + H'}{2}\right) \cos (H' - \psi).$$

Développant maintenant le second membre de cette équation, on obtient

$$\tang \psi = \frac{2e^2 \sin \left(\frac{H - H'}{2}\right) \cos \left(\frac{H + H'}{2}\right) \cos H'}{1 - 2e^2 \sin \left(\frac{H - H'}{2}\right) \cos \left(\frac{H + H'}{2}\right) \sin H'};$$

mais ne voulant ici tenir compte que des termes en e^2, on a, vu la petitesse de ψ,

$$\psi = 2e^2 \sin \left(\frac{H - H'}{2}\right) \cos \left(\frac{H + H'}{2}\right) \cos H';$$

et faisant $\frac{H - H'}{2} = \frac{\Delta H}{2}$, on a, à fort peu près,

$$\psi = e^2 \Delta H \cos^2 H;$$

c'est cette quantité du second ordre qu'il faut ôter de la latitude H' approchée, pour avoir la latitude exacte H_1, puisque $H' = H_1 + \psi$; on aura donc, au lieu de la formule (a), celle-ci :

$$(a') \quad H_1 = H - (u \cos Z + \tfrac{1}{2} u^2 \sin 1'' \sin^2 Z \tang H)(1 + e^2 \cos^2 H).$$

Dans toutes ces formules,

$$u = \frac{K (1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}{a \sin 1''}.$$

194. Nous venons de faire à la formule de latitude, la correction

dépendante de l'excentricité des méridiens terrestres. Quant aux formules de longitude et d'azimut, désignées par (b') et (c'), elles s'emploient sans modification, parce que l'aberration de sphéricité n'a sur elles aucune influence sensible. On voit en effet, que l'angle MpM' des deux méridiens sphériques est le même que celui des deux méridiens elliptiques PM, PM'. Mais de combien l'azimut $pM'M$, sur la Terre sphérique, c'est-à-dire l'angle des deux plans $pM'N$, $MM'N$, diffère-t-il de l'azimut $PM'M$, sur la Terre élliptique, c'est-à-dire de l'angle dièdre $PN'M'M$? C'est ce qu'il faut chercher.

Si l'on considère le point M' (fig. 41) comme le centre d'une sphère, sa surface sera coupée par les trois plans $MM'N$, $N'M'N$, $MM'N'$, suivant le triangle sphérique aNm: or, dans ce triangle, on connaît l'angle aNm, c'est l'azimut calculé. On connaît en outre l'arc Nm ou l'angle... $N'M'N = \psi$, qui est la correction de latitude; et à cause de l'angle $MNM' = u$, on a, en considérant le triangle $MM'N$ comme isoscèle, arc $aN = 1^{\text{r}} - \frac{u}{2}$; donc si ξ désigne la correction d'azimut, et z_1 l'azimut vrai compté du nord, on aura $z_1 - \xi = aNm =$ azimut approché z' compté de même. Il résulte de là que dans le triangle sphérique aNm, on connaît deux côtés et l'angle compris, et qu'il s'agit de déterminer l'angle ou l'azimut vrai $m'ma = z_1$. Or, $Nm = \psi$ étant très petit, la solution de ce problème se trouve dans la formule (γ) ci-dessus. On a donc, à cause de $mNa = z'$ compté du nord,

$$z_1 = z' + \psi \sin z' \operatorname{tang} \frac{u}{2} + \ldots;$$

d'ailleurs $\psi = e^2 \Delta H \cos^2 H = e^2 u \cos Z \cos^2 H$; il en résulte

$$z_1 = z' + e^2 u \sin z' \cos Z \cos^2 H \operatorname{tang} \frac{u}{2};$$

ou enfin, parce que u est un très petit arc, et que Z et z' diffèrent peu l'un de l'autre,

$$z_1 = z' + \tfrac{1}{4} e^2 u \sin 2Z \cos^2 H \operatorname{tang} u.$$

La correction d'azimut, représentée par le terme $\frac{1}{4} e^2 u \operatorname{tang} u \sin 2Z \cos^2 H$, et qui se trouve du troisième ordre, peut donc toujours se négliger.

2e SOLUTION.

195. Quoique les démonstrations des formules précédentes soient

très élémentaires, cependant ceux qui connaissent le Calcul différentiel préféreront sans doute la méthode suivante, à cause de son élégance et de sa généralité, et parce qu'elle conduit plus rapidement aux mêmes résultats.

Si l'on conserve la notation ci-dessus, et qu'on remarque que la latitude H' est nécessairement une fonction de l'arc K; on aura généralement, en supposant que S exprime la valeur de K réduite en parties du rayon,

$$H' = f(S), \quad P' = f_1(S), \quad V' = f_2(S);$$

f, f_1, f_2 étant des signes de fonctions indéterminées. Or, le point M étant l'origine de l'arc $S = \frac{K}{N}$, le théorème de Maclaurin donnera

$$\left.\begin{aligned} H' &= H + \left(\frac{dH'}{dS}\right) S + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2H'}{dS^2}\right) S^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3H'}{dS^3}\right) S^3 + \ldots \\ P' &= P + \left(\frac{dP'}{dS}\right) S + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2P'}{dS^2}\right) S^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3P'}{dS^3}\right) S^3 + \ldots \\ V' &= V + \left(\frac{dV'}{dS}\right) S + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V'}{dS^2}\right) S^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3V'}{dS^3}\right) S^3 + \ldots \end{aligned}\right\} (A);$$

en prenant pour valeurs des coefficiens différentiels, celles qui se rapportent au point où $S = 0$. La recherche de ces coefficiens est donc le fondement de la méthode actuelle. Voici comme on obtiendra leurs valeurs générales.

Si dans le triangle sphérique ABC (fig. 40), correspondant au triangle $MM'p$, on suppose l'angle A et le côté b constans, la relation

$$\sin B \sin a = \sin b \sin A$$

différenciée, donnera

$$da = -dB \frac{\tang a}{\tang B}.$$

Opérant de même sur l'équation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

on obtiendra, à cause de cette même équation,

$$da \sin a = dc \left(\frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin c}\right),$$

et par conséquent

$$da = dc \cos B;$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2V'}{dS^2} &= \frac{dV'}{dS}.\cos V' \operatorname{tang} H' + \frac{dH'}{dS}\cdot\frac{\sin V'}{\cos^2 H'}\\ &= \sin V' \cos V' \operatorname{tang}^2 H' + \frac{\sin V' \cos V'}{\cos^2 H'}\\ &= \sin V' \cos V' \left(\operatorname{tang}^2 H' + \frac{1}{\cos^2 H'}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\sin 2V' (\operatorname{tang}^2 H' + \operatorname{séc}^2 H')\\ &= \tfrac{1}{2}\sin 2V' (2\operatorname{tang}^2 H' + 1);\end{aligned}$$

et de même pour les ordres supérieurs. Mais tous ces coefficiens devant, par ce qui précède, se rapporter au point où $S = 0$, on a de suite, en supprimant les accens,

$$\left(\frac{dH'}{dS}\right) = \cos V,\ \left(\frac{d^2H'}{dS^2}\right) = -\sin^2 V \operatorname{tang} H,$$

$$\left(\frac{d^3H'}{dS^3}\right) = -3\sin^2 V \cos V \left(\frac{1}{3} + \operatorname{tang}^2 H\right);$$

$$\left(\frac{dP'}{dS}\right) = \frac{\sin V}{\cos H},\ \left(\frac{d^2P'}{dS^2}\right) = \frac{\sin 2V.\operatorname{tang} H}{\cos H},$$

$$\left(\frac{d^3P'}{dS^3}\right) = \frac{2\sin V \cos^2 V}{\cos H}(1 + 4\operatorname{tang}^2 H) - \frac{6\sin V}{\cos H}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tang}^2 H\right);$$

$$\left(\frac{dV'}{dS}\right) = \sin V \operatorname{tang} H,\ \left(\frac{d^2V'}{dS^2}\right) = \frac{1}{2}\sin 2V (2\operatorname{tang}^2 H + 1);$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^3V'}{dS^3}\right) &= -6\sin^3 V \operatorname{tang} H \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^2 H\right)\\ &\quad + 6\sin V \cos^2 V \operatorname{tang} H \left(\tfrac{5}{6} + \operatorname{tang}^2 H\right)\\ &= 6\sin V \cos^2 V \operatorname{tang} H (1 + \tfrac{4}{3}\operatorname{tang}^2 H)\\ &\quad - 6\sin V \operatorname{tang} H (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2 H).\end{aligned}$$

Si l'on s'arrête aux quantités du second ordre, et que l'on compte les longitudes et les azimuts du sud à l'ouest, ce qui exige que l'on fasse $V = 200 - Z$, et $V' = 400 - Z'$, on retombera précisément sur les séries (a), (b), (c), en supposant d'ailleurs S réduit en secondes et représenté par u.

Pour faire à la première de ces formules la correction ψ, due à l'ellipticité de la Terre, nous remarquerons que le triangle $NM'N'$ (fig. 40) donne

$$\sin \psi = \frac{NN' \cos H_1}{NM'},$$

ou, sans erreur sensible,

$$\sin \psi = \frac{NN' \cos H'}{N'M'};$$

car nous avons vu ci-dessus, que H_1 ne diffère de H' que d'une quantité du second ordre, et d'ailleurs on a à très peu près $NM' = N'M'$. Or, par la propriété de l'ellipse

$$CN \text{ ou } E = e^2 N \sin H, \quad CN' \text{ ou } E' = e^2 N' \sin H';$$

et si l'on suppose le point M' plus méridional que le point M, qu'on fasse $H - H' = \Delta H$, on aura

$$E' - E = -\left(\frac{dE'}{dH'}\right)\Delta H + \left(\frac{d^2E'}{dH'^2}\right)\frac{\Delta H^2}{2} - \ldots,$$

à cause que E' augmente quand ΔH diminue.

D'ailleurs

$$E' = \frac{ae^2 \sin H'}{(1 - e^2 \sin^2 H')^{\frac{1}{2}}} = ae^2 \sin H'\left(1 + \frac{1}{2}e^2 \sin^2 H' + \frac{3}{8}e^4 \sin^4 H' + \ldots\right)$$
$$= ae^2 \sin H' + \tfrac{1}{2} ae^4 \sin^3 H' \ldots,$$

de là

$$\left(\frac{dE'}{dH'}\right) = ae^2 \cos H + \frac{3}{2}ae^4 \sin^2 H \cos H,$$
$$\left(\frac{dE'^2}{dH'^2}\right) = -ae^2 \sin H;$$

et conséquemment, en s'arrêtant aux termes du troisième ordre,

$$E - E' = a\left[e^2 \cos H + \frac{3}{2}e^4 \sin^2 H \cos H\right]\Delta H + ae^2 \sin H . \frac{\Delta H^2}{2}.$$

Il résulte de là que

$$\sin \psi = \frac{(E - E')\cos H'}{N'} = \frac{(E - E')\cos H'(1 - \frac{1}{2}e^2 \sin^2 H')}{a}$$
$$= \frac{(E - E')\cos(H - \Delta H)[1 - \frac{1}{2}e^2 \sin^2(H - \Delta H)]}{a}.$$

Substituant pour $E - E'$, sa valeur précédente, développant et négligeant les quantités du quatrième ordre, on aura

$$\sin \psi = (e^2 \cos H + \tfrac{3}{2}e^4 \sin^2 H \cos H)\cos(H - \Delta H).\Delta H$$
$$+ \frac{e^2}{2}\sin H \cos(H - \Delta H).\Delta H^2$$
$$- \tfrac{1}{2}e^4 \sin^2 H \cos H \cos(H - \Delta H).\Delta H$$
$$= (e^2 \cos^2 H + \tfrac{3}{2}e^4 \sin^2 H \cos^2 H).\Delta H + \tfrac{3}{2}e^2 \cos H \sin H . \Delta H^2$$
$$- \tfrac{1}{2}e^4 \sin^2 H \cos^2 H . \Delta H$$
$$= (e^2 \cos^2 H + e^4 \sin^2 H \cos^2 H).\Delta H + \tfrac{3}{2}e^2 \sin H \cos H . \Delta H^2.$$

Vu la petitesse de e^2 et l'incertitude qui reste encore sur la vraie figure de la Terre, il est permis de rejeter de cette expression les termes du troisième ordre; on a donc seulement, comme à l'art. 193,

$$\sin \psi = e^2 \Delta H \cos^2 H, \text{ ou bien } \psi = e^2 \Delta H \cos^2 H.$$

Nous n'avons poussé les développemens ci-dessus, au-delà des besoins, qu'afin d'être à même de pouvoir apprécier ce qu'on néglige en ne conservant que le premier terme, et d'indiquer au lecteur une des voies les plus directes pour retrouver plusieurs des formules de la *Base du Système métrique* données dans les deux premiers volumes, et dont celles qui précèdent font partie.

196. La méthode que nous venons d'exposer, et par laquelle on détermine les positions géographiques des sommets des triangles, à l'aide des distances obliques, avait été proposée, dès 1787, par M. Legendre, dans un Mémoire sur les opérations géodésiques, imprimé parmi ceux de l'Académie royale des Sciences; et c'est celle que M. Delambre a principalement adoptée, à l'occasion de la nouvelle mesure d'un arc du méridien. Ces deux savans sont parvenus, chacun de leur côté, aux séries (*a*), (*b*), (*c*); mais M. Legendre, considérant en outre le cas où la ligne géodésique est perpendiculaire, a donné des formules qui dérivent des séries (A), en y supposant $V = 100^g$, et comptant les azimuts du nord.

La première hypothèse introduite dans les coefficiens différentiels, donne d'abord

$$\left(\frac{dH'}{dS}\right) = 0, \quad \left(\frac{dP'}{dS}\right) = \frac{1}{\cos H}, \quad \left(\frac{dV'}{dS}\right) = \tang H,$$

$$\left(\frac{d^2H'}{dS^2}\right) = -\tang H, \quad \left(\frac{d^2P'}{dS^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2V'}{dS^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^3H'}{dS^3}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^3P'}{dS^3}\right) = -\frac{2\tang^2 H}{\cos H}, \quad \left(\frac{d^3V'}{dS^3}\right) = -\tang H \times (2\tang^2 H + 1);$$

et les séries dont il s'agit donnent ensuite, en y mettant $200^g - z'$ pour V', afin de compter l'azimut du point M du nord,

$$H' = H - \tfrac{1}{2} S^2 . \tang H,$$

$$P' = P + \frac{S}{\cos H} - \tfrac{1}{3} S^3 \frac{\tang^2 H}{\cos H},$$

$$z' = 100^g - S \tang H + \tfrac{1}{3} S^3 \tang H (\tfrac{1}{2} + \tang^2 H)$$

$$= 100^g - S . \tang H' - \tfrac{1}{3} S^3 \tang H' (1 + \tfrac{1}{2} \tang^2 H).$$

Mais H' n'étant que la latitude approchée du point M', il faut, d'après ce qui a été dit précédemment, avoir égard au terme dépendant de l'aplatissement de la Terre. Alors, si, pour indiquer que la ligne géodésique K est perpendiculaire au méridien de M, on la désigne par y, on aura $S = \frac{y}{N}$, et définitivement en secondes,

$$(a'') \qquad H_1 = H - \frac{1}{2}\frac{y^2 \operatorname{tang} H}{N^2 \sin 1''}(1 + e^2 \cos^2 H);$$

réciproquement

$$(a_{\prime\prime}) \quad H = H_1 + \frac{1}{2}\frac{y^2 \operatorname{tang} H_1}{N'^2 \sin 1''}(1 + e^2 \cos^2 H_1);$$

puis longitude

$$(b'') \quad P' = P + \frac{y}{N \sin 1'' \cos H}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y^2}{N^2}\operatorname{tang}^2 H\right),$$

ou bien

$$(b_{\prime\prime}) \qquad P' = P + \frac{y}{N \sin 1'' \cos H'};$$

azimut

$$(c'') \quad z' = 100^g - \frac{y}{N \sin 1''}\operatorname{tang} H + \frac{1}{3}\frac{y^3}{N^3 \sin 1''}\operatorname{tang} H\left(\frac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 H\right);$$

ou, si l'on connaît seulement H_1

$$(c_{\prime\prime}) \; z' = 100^g - \frac{y}{N \sin 1''}\operatorname{tang} H_1 - \frac{1}{3}\frac{y^3}{N^3 \sin 1''}\operatorname{tang} H_1\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 H_1\right).$$

Ces formules n'exigent que la recherche d'un très petit nombre de logarithmes, et ont toutes des élémens communs qui en rendent le calcul très rapide, comme on le verra par les exemples que nous donnerons bientôt. Elles servent sur-tout lorsque les sommets des triangles sont connus par leurs distances à une méridienne et à sa perpendiculaire (art. 163); et comme elles dépendent de la latitude H du pied de la perpendiculaire y, latitude qui le plus souvent n'est pas donnée immédiatement, il est nécessaire de résoudre d'abord cette question :

Connaissant la distance x du pied M de la perpendiculaire y au point principal du réseau trigonométrique dont la latitude connue est h, trouver la latitude de M.

Or, on a par l'art. 185

$$H - h = \frac{x}{\sin 1''} - \frac{3}{4}\left(\frac{e^2}{1 - e^2}\right)\frac{\sin 2h}{\sin 1''}\frac{x^2}{\rho\rho'} \qquad (1),$$

ρ et ρ' désignant les rayons de courbure du méridien et de l'arc perpendiculaire à l'origine de x; c'est-à-dire que

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 h)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho' = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 h)^{\frac{1}{2}}}.$$

x doit être pris positivement ou négativement, selon que cet arc se trouve au nord ou au sud du lieu principal. On peut presque toujours, dans la pratique, se contenter du terme $\frac{x}{\rho \sin 1''}$; d'ailleurs il est aisé de calculer le second terme, en faisant usage des valeurs numériques données dans l'art. 181; et il y a cela de remarquable, que les coefficiens de x et x^2 sont constans pour toute l'étendue de la carte.

Nous venons d'exprimer en fonction de l'abscisse x, la latitude du pied de la perpendiculaire à la méridienne; il n'est pas moins important de connaître le développement d'un arc de cette perpendiculaire, suivant les puissances ascendantes de cette même variable. Soit donc u l'amplitude de l'arc y dont il s'agit; on a, à la latitude h,

$$u = \frac{y}{\rho'},$$

et à une distance x de ce lieu,

$$u = \frac{y}{\rho'} + d.\left(\frac{y}{\rho' dx}\right)x + \frac{1}{2}\,d^2.\left(\frac{y}{\rho' dx^2}\right)x^2 + \ldots.$$

Mais

$$\frac{y}{\rho'} = y\,\frac{(1-e^2\sin^2 h)^{\frac{1}{2}}}{a};$$

par conséquent

$$d.\left(\frac{y}{\rho' dx}\right) = -\frac{1}{2}\,e^2\,\frac{\sin 2h}{a^2}.\frac{\rho' y}{\rho};$$

de là, et en se bornant à la première puissance de x,

$$u = \frac{y}{\rho' \sin 1''}\left(1 - \frac{1}{2}.\frac{\rho'^2}{a^2}\,e^2 \sin 2h.\frac{x}{\rho}\right) \qquad (2).$$

197. Il est fort rare, dans la pratique, que l'on ait besoin d'un plus grand nombre de termes : cependant feu Plessis, ingénieur-géographe, qui s'était occupé des mêmes recherches, avait jugé à propos de continuer le développement des séries (1) et (2), en rejetant toutefois les termes en e^4. Ses résultats, qu'il est facile de

vérifier, sont

$$\Delta h = R''\frac{x}{\varrho}\left\{1 - \frac{3x}{4\varrho}\cdot\frac{e^2\sin 2h}{1-e^2\sin^2 h} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\varrho^2}\cdot\frac{e^2\cos 2h}{1-e^2\sin^2 h} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{\varrho^3}\cdot\frac{e^2\sin 2h}{1-e^2\sin^2 h}\right\} (1'),$$

$$u = R''\frac{y}{\varrho'}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\varrho}\cdot\frac{e^2\sin 2h}{1-e^2\sin^2 h} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\varrho^2}\cdot\frac{e^2\cos 2h}{1-e^2\sin^2 h} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{\varrho^3}\cdot\frac{e^2\sin 2h}{1-e^2\sin^2 h}\right\} (2').$$

Si l'on désigne toujours par h la latitude du lieu central, par H, H' les latitudes respectives du pied et de l'extrémité de la perpendiculaire y, par P la différence de longitude de ces points, on aura ensuite

$$H = h + \Delta h, \quad \text{tang}\, P = \frac{\text{tang}\, u}{\cos H},$$

$$\sin(H - H') = \sin H \sin u \,\text{tang}\,\frac{P}{2}(1 + e^2\cos^2 H),$$

ou

$$\sin(H - H') = \sin H' \,\text{tang}\, u \,\text{tang}\,\frac{P}{2}(1 + e^2\cos^2 H');$$

en vertu des art. 62 et 193.

Ces dernières formules ne dépendant pas de la petitesse de u, doivent, par cette raison, être substituées à celles de l'art. 196, lorsque les points de la carte sont très éloignés du méridien principal.

Quelque longues et compliquées que paraissent les formules (1'), (2'), on peut cependant en abréger beaucoup l'application, en calculant d'avance les coefficiens des différentes puissances de x et y. Mais, comme les positions géographiques des sommets d'un réseau se calculent plus aisément et avec plus d'exactitude par la méthode des distances obliques (art. 195), nous ne prolongerons pas plus loin nos remarques à cet égard.

Applications numériques.

198. Dans le dessein d'abréger le calcul des formules précédentes, nous avons construit les tables IX et X, pour l'aplatissement $\frac{1}{180}$ qui qui paraît convenir à la France, et pour le quart du méridien de 10 000 000^{mètres}; mais d'après les opérations géodésiques de M. Delambre, la longueur de cette ligne étant de 10 000 723^{m} (art. 180), il faudra, si l'on veut assujétir la table IX à cette nouvelle hypothèse, ajouter le log 0,0000314 à tous ceux des colonnes désignées par log y et par log N, et le complément de ce logarithme ou 9,9999686 à tous

les nombres des colonnes qui ont pour titre log fact. P et log. fact. F. Cela posé, résolvons la question suivante.

On sait que la latitude du Panthéon, à Paris, est $H = 54^g,274255$; que sa longitude, comptée de l'Observatoire royal, et d'orient en occident, est $P = 399^g,98931$; que le logarithme de la distance du Panthéon à Dammartin en arc et en mètres, est log $K = 4,5249711$; enfin que l'azimut de cette distance sur l'horizon du Panthéon est $Z = 251^g,4003$, compté du sud à l'ouest : on demande la latitude H_1 et la longitude P' de Dammartin, ainsi que l'azimut Z' du Panthéon sur l'horizon de cette ville.

Calcul de la latitude (formule a').

Avec la latitude H donnée, on trouve dans la table IX, pour 54^g,

le .....log du fact. F = 8,9974349
partie proportionnelle pour 0,2743..... = — 106
8,9974243.

Ajoutant, d'après la remarque précédente,

log. constant 9,9999686
on a.....log. fact. F corrigé = 8,9973929.
Ajoutant.....log K = 4,5249711
on a log K en secondes, ou .....log u = 3,5223640;

de là

1er terme.

log u = 3,5223640 —
log cos Z = 9,8397191 —
log 1er terme = 3,3620831 +
1er terme + 2301",88
2e terme — 5 ,20
ΔH = + 2296 ,68

2e terme.

2. log u = 7,04473 —
log sin Z = 9,85883
idem = 9,85883
log $\frac{1}{2}$ = 9,69897
l. sin 1" = 4,19612
l. tang H = 0,05849
l. 2e terme = 0,71597 —.

3e terme, ou correction d'aplatissement.

log ΔH = 3,36109 +
table X log e^2 cos² H = 7,68111
log. correct. d'aplatiss. = 1,04220 +
correct. d'aplatissement = + 11",02
ΔH..... = + 2296,68
H..... 54g,2742,55
latitude cherchée H_1 = 54g,5050,25.

Si on voulait calculer la correction d'aplatissement indépendamment des logarithmes, on trouverait dans la table X, que $e^2 \cos^2 H$ a pour valeur 0,0047984, ou simplement 0,0048; c'est par ce nombre qu'il faudrait multiplier ΔH; et l'on trouverait, comme ci-dessus, $+ 11^{s},02$: ainsi, la différence de latitude sur le sphéroïde est $\Delta H_1 = 2307^{s},7$.

Calcul de la longitude (formule b').

$$\begin{aligned}
\log u &= 3,5223550 + \\
\text{l.sin } Z &= 9,8588306 - \\
\text{compl. log cos } H_1 &= 0,1835338 \\
\text{log. différence des méridiens ou } \Delta P &= 3,5647194 - \\
\Delta P &= - \quad 3670,4 \\
P &= 399^{g},9893,1 \\
\text{longitude cherchée } P' &= 399^{g},6222,7.
\end{aligned}$$

Calcul de l'azimut (formule c').

$$\begin{aligned}
\log \Delta P &= 3,5647181 + \\
c.\cos \tfrac{1}{2}(H_1 - H) &= 0,0000007 \\
\sin \tfrac{1}{2}(H + H_1) &= 9,8774546 \\
\log \Delta Z &= 3,4421734 + \\
\Delta Z &= + \quad 2768^{s},10 \\
200^{g} + Z &= 451^{g},4003,00 \\
\text{azimut cherché } Z' &= 51,6771,10.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= 54^{g},274255 \\
\tfrac{1}{2}\Delta H_1 &= 0,115385 = \tfrac{1}{2}(H_1 - H) \\
\text{somme} &= 54,389640 = \tfrac{1}{2}(H + H_1)
\end{aligned}$$

Dans ce dernier calcul, on a pris ΔP avec un signe contraire, ainsi que l'exige la formule, et on a rejeté de la somme, 400^{g} qui font une circonférence entière.

C'est ainsi qu'en allant d'un sommet de triangle à un autre, on parvient à déterminer leurs positions géographiques, et à retomber sur des points déjà calculés; ce qui sert de vérification.

199. Calculons la même poition géographique, en supposant l'aplatissement de la Terre de $\frac{1}{335}$, afin de reconnaître l'influence de cette valeur sur cette position. La table XI donne, pour la latitude

54°,274, le logarithme 5,0013835, dont le complément arithmétique, augmenté de 4 unités, est le logarithme du facteur F, c'est-à-dire 8,9986165. Cela étant trouvé, l'on procédera ainsi qu'il suit :

Latitude.

Le log du facteur F = 8,9986165
ajoutant log const. = 9,9999686
on a log F corrigé = 8,9985851
mais log K = 4,5249711
donc log u = 3,5235562 — 2log u = 7,04711 —
log. cos Z = 9,8397191 — comme ci-dessus, 3,67124
l. 1er terme = 3,3632753 + l. 2e terme = 0,71835 —.
1er terme, + 2308",2
2e terme, — 5,2
ΔH = + 2303,0 log ΔH = 3,36229
correct. d'apl. = + 6,0 tabl. l ($e^2 \cos^2 H$) = 7,41189
diff. de lat. ΔH_1 = + 2309,0 0,77418 = 5",945
ci-dessus, 2307,7
diff. des résult., 1,3.

Longitude.

log u = 3,5235562 + H_1 = 54°,5051",55
l. sin Z = 9,8588306 —
c. log cos H_1 = 0,1835339
log ΔP = 3,5659207 — ΔP = — 3680",60
ci-dessus, 5670,40
diff. des résult., 10,20 = 3",2.

Azimut.

H = 54°,274255 log ΔP = 3,5659117 +
$\frac{1}{2}\Delta H_1$ = 0,115450 c. cos $\frac{1}{2}(H_1 - H)$ = 0,0000007
54,389705 sin $\frac{1}{2}(H + H_1)$ = 9,8774550
log ΔZ = 3,4433674 +; ΔZ = + 2775",67
ci-dessus, 2768,10
diff. des résultats, 7,57

Il résulte de ce calcul, que quoique la formule (b') convienne à la sphère et au sphéroïde, cependant l'aplatissement a en général une influence sensible sur les longitudes déduites, à cause de l'arc K que l'on est obligé de réduire en secondes, et qui se trouve un des facteurs essentiels de la formule dont il s'agit.

Si l'on voulait faire d'autres hypothèses d'aplatissement, et néanmoins profiter de la table XI, il faudrait, ainsi qu'il est aisé de le prouver, augmenter les logarithmes de la seconde colonne de la quantité $Md\alpha \sin^2 H$, M étant le module 0,434249, et $d\alpha$ désignant l'excès du nouvel aplatissement sur $\frac{1}{335} = 0{,}002985$.

Par exemple, soit $\alpha = \frac{1}{309} = 0{,}00324$, et $H = 54^g{,}27$; on aura

$$d\alpha = \frac{1}{309} - \frac{1}{335} = 0{,}00026;$$

de là

$$\begin{aligned} \log Md\alpha &= 6{,}05275 \\ \text{l.sin } 54^g{,}27 &= 9{,}87674 \\ \textit{idem} &= 9{,}87674 \\ \hline & \quad 5{,}80623 = 0{,}00006401. \end{aligned}$$

Ainsi, la table donnant, pour la même latitude,

$$\begin{aligned} & 5{,}0013834 \\ \text{et la correction étant } + & \ 0{,}0000640 \\ \hline \text{on a, facteur corrigé} = & \ 5{,}0014474 \\ \text{complém. arithmét.} + 4, \text{ ou } \log F = & \ 8{,}9985526. \end{aligned}$$

Il reste à corriger le terme $e^2 \cos^2 H = 2\alpha \cos^2 H$ donné par la table. Or, la quantité à ajouter à ce terme est évidemment $2d\alpha \cos^2 H$, laquelle est ordinairement fort petite.

200. Conservons les mêmes données que dans le problème précédent, puis cherchons les distances à la méridienne et à la perpendiculaire de Dammartin par rapport au Panthéon, et la position géographique de cette ville à l'aide de ces mêmes distances.

D'après l'art. 164, on a

$$x = K \cos Z, \quad y = K \sin Z,$$

K étant la distance du Panthéon à Dammartin, et Z l'azimut de cette distance sur l'horizon du Panthéon. Reprenant les valeurs

numériques précédentes, on aura

$$\log K = 4{,}5249711 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4{,}5249711$$
$$\text{l.cos } Z = 9{,}8397191 - \quad \text{l.sin } Z = 9{,}8588306 -$$
$$\log x = 4{,}3646902 - \quad \log y = 4{,}3838017 -$$
$$\text{dist. à la perpendiculaire } x = -\ 23157^{m},42,$$
$$\text{dist. à la méridienne } y = -\ 24199\ ,24,$$

longueurs déjà trouvées à l'art. 163. Ainsi, en vertu de la convention établie à l'article précité, Dammartin se trouve dans la région nord-est, par rapport à la méridienne et à la perpendiculaire du Panthéon.

Maintenant, pour calculer la position géographique de Dammartin, au moyen de x et de y, on déterminera d'abord la latitude H du pied de la perpendiculaire y, laquelle sera évidemment égale à la latitude du Panthéon augmentée de l'arc x réduit en secondes. Or, on a, d'après la table IX,

tab. (arg.lat. $54^{g},2743$) log fact. $P = 8{,}9995260$	tab. (arg.lat. H) fact. $F = 8{,}9974159$
log. const. $= 9{,}9999686$	log. const. $= 9{,}9999686$
log fact. P corrigé $= 8{,}9994946$	log fact. F corrigé $= 8{,}9973845$
log. $x = 4{,}3646902$	log $y = 4{,}3838017$
log $x^{s} = 3{,}3641848$.	log $y^{s} = 3{,}3811862$

$$\text{Ainsi} \quad x^{s} = +\ 2313^{s},00$$
$$\text{lat. du Panthéon} = 54^{g},2742\ ,55$$
$$\text{lat. } H = 54\ ,5055\ ,55.$$

La latitude H étant trouvée, on procédera comme il suit.

Calcul de la latitude (formule a'').

		1er et 2e terme.		
$\log \frac{1}{a}$ =	9,6989700 —			
$\log y^{s}$ =	3,3811862			
idem =	3,3811862			
sin 1^{s} =	4,1961199			
tang H =	0,0616791			
log 1er terme =	0,7191414 —		1er terme =	— 5^{s},24
table X fact. =	7,67741	2e terme, ou corr. d'apl.		— 0 ,02
log 2e terme	8,39655 —			— 5 ,26
			H =	54^{g},5055 ,55
			latitude cherchée H_{1} =	54 ,5050 ,29.

C'est, à $\frac{1}{100}$ de seconde décimale près, la même valeur que celle obtenue précédemment.

Calcul de la longitude (formule $b_{\prime\prime}$).

$$\log y^{s} = 3{,}3811862 -$$
$$c.\cos H_{1} = 0{,}1835325$$
$$\log \Delta P = 3{,}5647187 -$$

donc $\Delta P = -\ 3670^{s},4$

$$P = 399^{g},9893\ ,1$$

comme ci-dessus, longit. cherchée $P' = 399\ ,6222\ ,7$.

Calcul de l'azimut (formule c'').

1er terme.	2e terme.	3e terme.
$\log y^{s} = 3{,}3811862 -$	$3\log y^{s} = 0{,}14356$	
$1.\tan g\, H = 0{,}0616791$	$2\sin 1^{s} = 8{,}39224$	
$\log 1^{er}$ terme $= 3{,}4428653$	$\log \frac{1}{3} = 9{,}52288$	
	$\log \tan g\, H = 0{,}06168$	$2\tan g\, H = 0{,}12336$
1er terme $- 2772^{s},40$	$8{,}12036$	$8{,}12033$
2e terme $+ 0\ ,01$	$\log \frac{1}{2} = 9{,}69897$	1.3e term. $= 8{,}24369$
3e terme $+ 0\ ,02$		
$- 2772\ ,37$	$\log 2^{e}$ terme $7{,}81933$	
$100^{g},0000$		
azimut cherché $= 99\ ,7227\ ,63$.		

La correction d'azimut $- 2772^{s},37$ s'appelle aussi la *convergence des méridiens* des deux extrémités de y, ou dans le cas actuel, des méridiens de Paris et de Dammartin.

CHAPITRE XVI.

Applications des formules précédentes à la détermination d'une méridienne et d'un arc de parallèle.

201. La méthode expliquée à l'article 159, pour déterminer la longueur d'un arc de méridien et d'une perpendiculaire, dépend de celle sur laquelle est fondée la résolution des triangles sphériques peu courbes, et de la connaissance de l'angle azimutal du premier côté du réseau. Quoiqu'elle soit simple par elle-même, cependant on ne peut l'appliquer avec succès qu'en choisissant parmi les triangles du canevas construit à une échelle assez grande, ceux qui jouissent des conditions requises.

Lorsque, dans les calculs de cette espèce, on emploie uniquement les angles sphériques, ainsi que l'a fait M. Delambre dans la détermination de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et de Barcelonne, on se trouve obligé de passer des logarithmes de sin K et sin K' à celui de sin $(K-K')$. Par exemple, la résolution du triangle sphérique ACM (fig. 34) donnant log sin CM, on a besoin de connaître log sin $BM = \log\sin(BC - CM)$, pour pouvoir résoudre le second triangle sphérique BMM'. Voici de quelle manière M. Delambre lève cette petite difficulté.

A cause de

$$\begin{aligned}\sin K - \sin K' &= 2\sin\tfrac{1}{2}(K-K')\cos\tfrac{1}{2}(K+K')\\ &= \frac{\sin(K-K')\cos\frac{1}{2}(K+K')}{\cos\frac{1}{2}(K-K')},\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\sin(K-K') &= \frac{(\sin K - \sin K')\cos\frac{1}{2}(K-K')}{\cos\frac{1}{2}(K+K')}\\ &= \sin K\left(1-\frac{\sin K'}{\sin K}\right)\frac{\cos\frac{1}{2}(K-K')}{\cos\frac{1}{2}(K+K')};\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}\log\sin(K-K') = \log\sin K &+ \log\left(1-\frac{\sin K'}{\sin K}\right)\\ &+ \log\left[1-2\sin^2\tfrac{1}{4}(K-K')\right]\\ &- \log\left[1-2\sin^2\tfrac{1}{4}(K+K')\right].\end{aligned}$$

D'ailleurs la petitesse de K et de K' permettant de faire

$$\begin{aligned}&\log[1-2\sin^2\tfrac{1}{4}(K-K')]-\log[1-2\sin^2\tfrac{1}{4}(K+K')]\\ &=2M[\sin^2\tfrac{1}{4}(K+K')-\sin^2\tfrac{1}{4}(K-K')]=2M\sin\tfrac{1}{2}K\sin\tfrac{1}{2}K'\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=\tfrac{1}{2}M\sin K\sin K',\end{aligned}$$

on a, en faisant attention que $\sin K$ et $\sin K'$ sont donnés en mètres,

$$\log\sin(K-K')=\log\sin K+\log\left(1-\frac{\sin K'}{\sin K}\right)+\frac{M}{2\rho^2}\sin K\sin K';$$

ρ étant le rayon de la Terre, et M le module 0,43429. Pareillement

$$\log\sin(K+K')=\log\sin K+\log\left(1+\frac{\sin K'}{\sin K}\right)-\frac{M}{2\rho^2}\sin K\sin K'.$$

Mais on est dispensé de l'usage de ces formules et d'une figure, par le procédé analytique suivant.

Supposons premièrement qu'il faille calculer la longueur de la méridienne AX (fig. 34) comprise entre les parallèles des points extrêmes A, L. On commencera par déterminer, à l'aide des formules (a'), (b'), (c'), les positions géographiques des points B, D, F, H, K, L situés sur la ligne polygonale qui s'étend le long de la méridienne. Ensuite, on calculera la différence des parallèles des deux premiers points A, B; puis des points B, D; puis des points D, F, etc., jusqu'à ce qu'on soit enfin arrivé à l'extrémité L de la chaîne. La somme de toutes ces différences sera la longueur cherchée, comme cela est évident.

La formule qui donne la différence des parallèles de deux points tels que A, B extrémités du premier côté K du réseau, est précisément la première (A) de l'art. 195, dans laquelle S est remplacé par K exprimé en mètres. Mais, dans cette circonstance, il est indispensable de conserver les termes du troisième ordre. On a donc, en rétablissant l'homogénéité,

$$\begin{aligned}dH=&-K\cos Z-\tfrac{1}{2}\frac{K^2}{N}\sin^2 Z\tang H\\ &+\tfrac{1}{6}\frac{K^3}{N^2}\sin^2 Z\cos Z(1+3\tang^2 H)\quad\text{(A)};\end{aligned}$$

N désignant la normale au point A de l'ellipsoïde de révolution.

La valeur de cette normale ne peut se calculer qu'approximativement; il en est de même des valeurs des séries (a'), (b'), (c'), puisque quand il s'agit d'évaluer un arc de méridien, l'on est censé ne connaître l'aplatissement de la Terre qu'imparfaitement. Mais l'incertitude qui existe à cet égard, n'est ici d'aucune conséquence.

Il faut bien faire attention que, dans le calcul de la différence des parallèles, on ne doit pas tenir compte du terme $e^2 \cos^2 H$, comme pour la différence des latitudes; car en tant qu'il s'agit d'un arc de plus courte distance, cet arc peut être considéré, vu sa petitesse, comme celui d'un cercle dont le rayon est égal à la normale correspondante; mais la véritable amplitude de cette ligne géodésique est sur le sphéroïde l'angle des deux normales de ses extrémités, et non celui des deux rayons extrêmes de l'arc de cercle dont il s'agit.

Si on calcule de la même manière la différence des parallèles des points extrêmes A, L, à l'aide de la ligne polygonale $ACEGIL$, qui ne s'écarte pas encore trop de celle qu'on veut déterminer, on aura une vérification du premier résultat : il conviendra de prendre le milieu entre les deux, s'ils diffèrent un peu l'un de l'autre.

Afin de donner une application de la formule précédente, nous allons calculer la différence des parallèles du Panthéon et de Dammartin. Les élémens de cette formule sont, d'après l'art. 198,

$$\log K = 4{,}5249711; \quad Z = 251^{\text{r}},4003; \quad H = 54^{\text{r}},274255.$$

Et la table IX donne, avec l'argument H, $\log N = 6{,}8064555$, puisque l'aplatissement des méridiens, en France, est à peu près de $\frac{1}{180}$.

TYPE DU CALCUL.

1er terme.

$$\begin{aligned} \log K &= 4{,}5249711 \; - \\ \text{l.cos } Z &= 9{,}8397191 \; - \\ \text{l.1er terme} &= 4{,}3646902 \; + \end{aligned}$$

2e terme.

$$\begin{aligned} \log \tfrac{1}{2} &= 9{,}69897 \; - \\ 2\log K &= 9{,}04994 \\ 2\log \sin Z &= 9{,}71766 \\ \log \text{tang } H &= 0{,}05849 \\ c.\log N &= 3{,}19354 \\ \log \text{2e terme} &= 1{,}71860 \; - . \end{aligned}$$

3e et 4e terme.

$l.\frac{1}{6} = 9{,}22185 +$

$3\log K = 3{,}57491$

$2l.\sin Z = 9{,}71766$

$l.\cos Z = 9{,}83972 -$

$2c.\log N = 6{,}38708$

$l.3^e\text{ terme} = 8{,}74122 -$

$\log 3 = 0{,}47712$

$2\log \operatorname{tang} H = 0{,}11698$

$l.4^e\text{ terme} = 9{,}33532 -$

Récapitulation.

1er terme $= +23157^m{,}42$

2e terme $-52^m{,}312$
3e ..... $-\ 0{,}055$
4e ..... $-\ 0{,}216$
$= -\ 52{,}58$

diff. des parall. $dH = 23104{,}84.$

On calcule directement la correction à faire aux distances obliques, pour les réduire à l'arc du méridien compris entre les parallèles de leurs extrémités, en employant la formule suivante :

$$K - dH = 2K\cos^2\tfrac{1}{2}Z + \tfrac{1}{2}\frac{K^2}{N}\sin^2 Z \operatorname{tang} H$$
$$- \tfrac{1}{6}\frac{K^3}{N^2}\sin^2 Z\cos Z\,(1 + 3\operatorname{tang}^2 H) \quad (A')$$

qui dérive de celle (A), en y écrivant $2\cos^2\frac{1}{2}Z - 1$ au lieu de $\cos Z$; et pour lors toutes les fois que $\cos\frac{1}{2}Z$ sera petit, tout le calcul pourra s'effectuer avec des logarithmes à cinq décimales.

202. Il est des géomètres qui emploient concurremment avec la méthode précédente celle des perpendiculaires exposée à l'art. 164, mais que l'on rend plus rigoureuse ainsi qu'il suit :

Soit MM' (fig. 42) un côté K de la chaîne des triangles, et AX la méridienne dont on cherche la longueur. Si, par les points M, M', on conçoit deux arcs de grand cercle OM, OM' perpendiculaires en P, P' à la méridienne AX, ces arcs se rencontreront en un point O qui sera le pôle de l'arc PP' qu'on a en vue de calculer. Or, en désignant les coordonnées AP, PM par x, y; celles AP', $P'M'$ par x', y'; les latitudes de M, M' par H, H', et leurs longitudes par P, P'; enfin la normale au point M par N; l'amplitude de l'ordonnée du point M s'obtiendra à l'aide de la formule

$$(1) \qquad \sin y = \cos H \sin P,$$

qui dérive de la propriété du triangle sphérique rectangle pPM formé par les deux méridiens pP, pM et par l'ordonnée circulaire PM.

Si l'on désigne l'azimut PMp par μ, ce même triangle donnera

$$(2) \qquad \cot \mu = \sin H \operatorname{tang} P.$$

Mais l'azimut de MM' sur l'horizon de M est connu; représentons-le par Z, comme à l'ordinaire; alors l'angle OMM' sera égal à $\mu + Z$. D'ailleurs, en considérant les deux arcs OP, OP' comme deux méridiens, les ordonnées y, y' seront, par rapport à eux, les latitudes de M, M'; et, comme dans le triangle sphérique OMM' le côté $MM' = K$ est très petit à l'égard des deux autres, on a, en vertu des formules (b), (a) (art. 195), et en faisant $200^g - \mu - Z = V$, pour abréger,

$$(\beta') \qquad x' = x + \frac{K \sin V}{\cos y} - \frac{K^2}{N} \sin V \cos V \frac{\operatorname{tang} y}{\cos y},$$

$$(\alpha') \qquad y' = y - K \cos V - \tfrac{1}{2} \frac{K^2}{N} \sin^2 V \operatorname{tang} y;$$

partant $$PP' = x' - x.$$

Il suit de là que, si l'on connaît x, y en mètres, on aura par ces formules, x', y' en même mesure. Mais en partant de l'origine A de la méridienne, les coordonnées x, y sont nulles.

Remarquez qu'il n'est pas nécessaire que les formules (1) et (2) soient évaluées avec une extrême précision.

203. Le calcul d'un arc de parallèle s'effectue par un procédé tout semblable à celui dont il a été question à l'art. 201.

Supposons que K, K', K''... soient, à partir de la méridienne principale, les côtés consécutifs d'un réseau trigonométrique allant de l'est à l'ouest, par exemple, et, par les extrémités de ces côtés, concevons des méridiens : ceux-ci intercepteront sur un même parallèle à l'équateur terrestre des parties qu'il s'agira de calculer. Or, si, après avoir déterminé assez exactement les positions géographiques des sommets des triangles, on désigne par H' la latitude de l'extrémité de K la plus éloignée de la méridienne principale; par N' la normale en ce point; par H_m la latitude du parallèle dont on veut avoir la longueur, et par N_m la normale à cette latitude, on aura,

relativement au côté K, et pour la partie P_m de parallèle cherchée,

$$P_m = \frac{N_m \cos H_m}{N' \cos H'}\left(K \sin Z - \frac{K^3 \sin Z}{6N'^2} + \frac{K^3 \sin^3 Z}{6N'^2 \cos^2 H'}\right) \qquad \text{(B)}.$$

Dans cette formule très simple, qui provient du développement en série de $\sin P = \frac{\sin K \sin Z}{\cos H'}$, et de ce principe, savoir : que les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons, on a

$$N' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H')^{\frac{1}{2}}}, \quad N_m = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H_m)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(art. 167)};$$

Z étant toujours l'azimut de K sur l'horizon de son origine, et compté du sud à l'ouest.

Pour chaque côté K, on aura une équation semblable ou une valeur de P_m; si donc Π dénote la longueur du parallèle à la latitude H_m, on aura

$$\Pi = P_m + P'_m + P''_m + \ldots$$

Ainsi, partant de la méridienne principale, pour se rendre à l'extrémité de l'arc à mesurer, on obtiendra, à l'aide de deux systèmes de lignes telles que K, K', K''..., deux valeurs de Π, lesquelles se serviront de preuve mutuellement. Ce moyen, analogue à celui que M. Delambre a employé pour calculer l'arc du méridien depuis Dunkerque jusqu'à Barcelonne, sera très commode dans la pratique, si l'on a soin de former d'avance une table des diverses valeurs du logarithme de la normale, d'après la connaissance approchée de l'aplatissement de la Terre; parce qu'il n'y a d'autre attention à avoir, que celle qui est relative aux signes algébriques.

EXEMPLE.

Supposant les mêmes données, et la même notation qu'à l'art. 198, on demande l'arc du parallèle compris entre les méridiens du Panthéon et de Dammartin, et dont la latitude $H_m = 54^g$?

On a $\qquad H = 54^g,274255, \quad H' = 54^g,505025,$

et la table IX donne

$$\log N' = 6,8064642, \quad \log N_m = 6,8064452;$$

de là, et en vertu de la formule (B) ci-dessus :

1er terme.

$$\log N_m = 6{,}8064452$$
$$c.\log N' = 3{,}1935358$$
$$\log \cos H'_m = 9{,}8204063$$
$$c.\log \cos H' = 0{,}1835338$$
$$\log.\text{facteur} = 0{,}0039211$$
$$\log K = 4{,}5249711$$
$$l.\sin Z = 9{,}8588306 \; -$$
$$\log 1^{er}\text{ terme} = 4{,}3877228 \; -$$

2e terme.

$$\log.\text{facteur} = 0{,}00392 \; -$$
$$3.\log K = 3{,}57491$$
$$c.\log 6 = 9{,}22185$$
$$2.c.\log N' = 6{,}38707$$
$$l.\sin Z = 9{,}85883 \; -$$
$$\log.2^e\text{ terme} = 9{,}04658 \; +$$

3e terme.

$$\log 2^e\text{ terme} = 9{,}04658 \; -$$
$$2\log \sin Z = 9{,}71766$$
$$2c\log \cos H' = 0{,}36706$$
$$\log 3^e\text{ terme} = 9{,}13130 \; -.$$

Récapitulation.

1er terme	—	24418m,639
2e	+	0 ,113
3e	—	0 ,135
$P_m =$	—	24418 ,661.

L'arc cherché P_m est affecté du signe négatif, parce qu'il se trouve à l'est du méridien du point de départ du Panthéon ; il serait positif, s'il était situé à l'ouest du même point.

CHAPITRE XVII.

Usage des formules différentielles trigonométriques, pour corriger les positions géographiques provisoires des points principaux d'une carte.

[illegible] Les éléments des calculs trigonométriques sont si multipliés, lorsqu'il s'agit d'une longue suite de triangles à résoudre, qu'il n'est pas [illegible] de commettre quelque erreur sur la longueur des coordonnées des extrémités des côtés. Cependant, comme c'est de l'exactitude de ces mêmes coordonnées que dépend celle des latitudes, longitudes et azimuts des lignes mesurées, et réciproquement, il est important de corriger les résultats obtenus en premier lieu, et de connaître les rapports qui existent entre les quantités susceptibles d'éprouver des variations, afin que, si l'on se trouve dans la nécessité d'altérer quelques-unes d'elles, soit par suite de meilleures observations, soit à cause de quelques erreurs primitives, on puisse, de la manière la plus simple, évaluer les corrections qu'éprouvent les autres quantités en vertu de ces altérations.

Par exemple, [illegible] *l'effet que produit sur la latitude, la longitude et l'azimut, une petite variation dans les distances à la méridienne et à sa perpendiculaire.*

Supposons que l'abscisse x reçoive un petit accroissement dx, que r soit son rayon de courbure à la latitude H', et que dH' désigne l'amplitude de dx, on aura évidemment

$$dH = \frac{dx}{\text{gon}\, r},$$

ou simplement, en secondes centesimales,

$$dH = \frac{dx}{r}.$$

Cette valeur de dH se prendra positivement ou négativement, selon que dx s'étendra vers le nord ou vers le sud.

Maintenant, si l'on différencie l'équat. (a'') de l'art. 196, par rapport à y seulement, on aura, en négligeant le dernier terme relatif à l'excentricité de la Terre,

$$dH' = -\frac{y\,dy \operatorname{tang} H}{N^2 \sin 1''}.$$

La correction de la latitude du sommet de la perpendiculaire est donc négative, quand la variation de cette perpendiculaire est positive.

L'équat. (b'') fournit, par le même procédé,

$$dP = \frac{dy}{N \cos H \sin 1''},$$

et l'équat. (c'') donne

$$dz' = -\frac{dy}{N \sin 1''} \operatorname{tang} H.$$

On trouverait avec autant de facilité des relations entre dy et chacune des variations dH', dP, dz', dans le cas où la latitude H du pied de la perpendiculaire serait elle-même variable; mais il est plus commode alors de refaire en entier le calcul des formules.

205. Cette méthode ayant seulement rapport aux petites variations dans les distances d'un point à la méridienne et à sa perpendiculaire, il faut résoudre le problème plus généralement. Supposons d'abord, que les latitudes et longitudes de tous les points principaux d'un réseau trigonométrique aient été calculées à l'aide d'un azimut provisoire; il s'agit de faire à ces latitudes et longitudes les corrections dues à l'erreur commise sur cet azimut, sans recourir pour cela aux formules de l'art. 195, ni à d'autres qui pourraient remplir le même but.

Comme les distances entre les points trigonométriques sont censées avoir été déterminées exactement, la nouvelle orientation s'effectue sur-le-champ, en faisant tourner tout le réseau autour du point où l'on a observé l'azimut, d'une quantité angulaire égale à la différence de l'azimut vrai à l'azimut approché. En effet, soit A (fig. 43) le lieu de l'observation, B un sommet quelconque de triangle, et C le pôle de la Terre que l'on peut supposer sphérique dans cette circonstance. Si, en vertu de la variation observée dans l'angle BAC, le point B doit être transporté en B'; tout autre point b lié invaria-

blement au premier, sera, par suite du mouvement commun autour de A, transporté en b'; et l'angle bAb' qui est égal à BAB' sera la variation d'azimut, variation que nous supposerons de quelques secondes seulement. La question, envisagée sous ce point de vue, est donc ramenée à chercher les équations différentielles d'un triangle sphérique, dans lequel un angle est variable et les deux côtés qui le comprennent sont constans.

Soit ABC ce triangle, et a, b, c les côtés opposés aux angles de mêmes dénominations; on aura

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \qquad (1),$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \qquad (2),$$
$$\sin A \sin c = \sin a \sin C \qquad (3).$$

Si l'on différencie les deux premières équations, en faisant varier A, a et C, et regardant b, c comme constans, on aura

$$da \sin a = dA \sin A \sin b \sin c,$$

$$0 = -da \sin a \cos b + da \cos a \sin b \cos C - dC \sin C \sin a \sin b.$$

Mais de la troisième équation, l'on tire $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$: mettant cette valeur dans la première équation différentielle, on obtient

$$da = dA \sin b \sin C \qquad (m);$$

et introduisant cette valeur dans la seconde, on a

$$dC = -\cos b\,(1 - \cot a \operatorname{tang} b \cos C)\, dA \qquad (n).$$

Soit maintenant H la latitude vraie du point A; H' la latitude approchée du point B; Z l'azimut approché du côté BA, observé sur l'horizon de A, et compté du sud à l'ouest depuis 0 jusqu'à 400^g; enfin, P' la différence approchée des longitudes des points A et B: les formules de correction (m) et (n) seront respectivement

$$dH' = \cos H \sin P' dZ \qquad (m'),$$
$$dP' = \sin H\,(1 - \operatorname{tang} H' \cot H \cos P')\, dZ \qquad (n');$$

puisqu'à la seule inspection de la figure, on voit que $da = -dH'$, $dA = -dZ$ et $dC = dP'$.

Il résulte de là, que

latitude vraie du point $B = H' + dH'$,
différence de longitude des points A et $B = P' + dP'$.

L'emploi de ces formules n'est sujet à aucune difficulté; j'observerai seulement que la variation d'azimut dZ doit être prise avec son signe, et que Z doit ici se compter du sud à l'est : ce serait le contraire s'il s'agissait du point b.

206. Cherchons maintenant la variation d'un azimut quelconque pris sur l'horizon du point à rectifier et déduit du premier.

Soient toujours b, c, les deux côtés constans, et A l'angle variable du triangle sphérique ABC; dA la variation de l'azimut de départ, et dB celle de l'azimut au point B : on parviendra à trouver le rapport de dA à dB, en différenciant l'équation

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B;$$

opération qui donne d'abord, après avoir mis à la place de $\sin c \cos B$, sa valeur déduite de cette même équation,

$$da \left(\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a}\right) + \sin a \sin c \sin B dB = 0;$$

puis réduisant, on a

$$da \cos C + dB \sin a \sin C = 0.$$

Mais $da = dA \sin b \sin C$; par conséquent

$$dB = -dA \frac{\sin b \cos C}{\sin a}.$$

Soit donc Z l'azimut pris du point A et compté du sud à l'ouest, Z' un de ceux qui ont été conclus de celui-ci et qui se trouvent sur l'horizon de B; on aura, en vertu de cette formule, et désignant d'ailleurs par H, H' les latitudes de ces deux points, par P' leur différence en longitude,

$$dZ' = \frac{\cos P' \cos H}{\cos H'} dZ,$$

parce que Z et Z' croissent ou décroissent en même tems. Ainsi sans repasser par tous les azimuts intermédiaires, on assignera sur-le-champ la correction à faire à un azimut quelconque, par suite d'un très petit changement survenu dans celui de départ.

Si l'on différencie dans la même hypothèse l'équation

$$\sin b \sin C = \sin B \sin c,$$

on aura

$$dC \sin b \cos C = dB \cos B \sin c,$$

d'où

$$dB = dC \frac{\sin b \cos C}{\cos B \sin c};$$

égalant cette valeur à la précédente, on trouve

$$\frac{dC}{dA} = -\frac{\sin c \cos B}{\sin a}.$$

Telle est la relation entre la variation d'azimut de départ et celle de longitude du point que l'on considère.

Examinons maintenant le cas où la latitude et la longitude du lieu principal d'une carte éprouvent une petite correction, et cherchons l'influence de ces deux corrections sur les positions géographiques de tous les autres points du réseau.

D'abord il est évident que si la longitude absolue φ du lieu principal A, augmentait d'une quantité quelconque ϖ, les longitudes de tous les autres points du réseau, et comptées toujours dans le même sens, augmenteraient de la même quantité. Il reste donc à faire connaître le moyen de corriger tant les latitudes et les longitudes de ces mêmes points, que les azimuts conclus, lorsqu'il existe seulement une petite variation dans la latitude du point A.

Pour cet effet, l'on regardera c, A comme constans dans le triangle ABC, et l'on aura, par la méthode de l'art. 195,

$$da = db \cos C,$$

$$dC = -db \frac{\sin C}{\tang a},$$

$$dB = db \frac{\sin C}{\sin a}.$$

Mais, à cause de $b = 100^g - H$, $a = 100^g - H'$, $C = P'$, $dB = -dZ'$, et de ce que H, H', P' croissent en même tems que Z' diminue, l'on a, pour la variation

en latitude, $dH' = dH \cos P'$,

en longitude, $dP' = dH \frac{\sin P'}{\cot H'}$,

en azimut, $dZ' = -dH \frac{\sin P'}{\cos H'}$.

De sorte que,

la latitude exacte du point B sera..... $H' + dH'$,
sa longitude absolue et rectifiée..... $\varphi + \varpi + P' + dP'$,
et un azimut quelconque sur l'horizon de ce point, de Z' qu'il était, deviendra.. $Z' + dZ'$.

207. Supposons en dernier lieu, que tous les côtés d'un réseau de triangles rattaché à une base B provisoire, aient été déterminés à l'aide de cette base, et qu'il faille les assujétir à la base définitive $B + dB$; il est évident qu'il sera nécessaire de les multiplier par le rapport constant $\frac{B + dB}{B}$. Soit donc K un des côtés calculés provisoirement, et $K + dK$ sa valeur exacte; on aura

$$K + dK = \frac{(B + dB)}{B} K,$$

et par conséquent

$$\log (K + dK) = \log K + \log \left(\frac{B + dB}{B}\right).$$

On a aussi

$$\text{correction } dK = \frac{KdB}{B};$$

enfin

$$\log (K + dK) = \log K + \log \left(1 + \frac{dB}{B}\right)$$
$$= \log K + \frac{MdB}{B} - \frac{MdB^2}{2B^2} + \ldots$$

La correction dB de la base à laquelle se rattache le réseau, est toujours assez petite pour que le premier terme $\frac{MdB}{B}$ du développement ci-dessus suffise.

CHAPITRE XVIII.

Évaluation de l'étendue superficielle de la Terre, et d'une partie quelconque de sa surface.

De l'aire d'un triangle et de celle d'un trapèze sphérique.

208. Les triangles qui couvrent le pays dont on a levé la carte, présentent souvent une sorte de ramification continue autour du centre du lieu principal; mais quand même ces triangles ne seraient pas tous liés immédiatement les uns aux autres, la question proposée serait toujours ramenée à calculer les aires des triangles ou des quadrilatères sphériques qui composent l'aire du terrain; sauf ensuite à évaluer les petites portions de surface qui pourraient être comprises entre les limites du pays et les côtés des triangles ou des quadrilatères extrêmes dont il s'agit : évaluation qui s'effectue aisément à l'aide d'opérations graphiques exécutées sur la carte même, comme on le verra dans le *Traité de Topographie*.

Lorsque les triangles du réseau ont peu d'étendue, on les considère comme des triangles rectilignes, et leur surface s s'obtient par la formule connue

$$s = \frac{ab}{2} \sin C.$$

S'ils sont de premier ordre, on en évalue la surface au moyen de la série obtenue à la fin de l'art. 100, mais qu'on peut, dans tous les cas, borner au second terme.

En général on a, pour un triangle sphérique ABC,

$$\varepsilon = A + B + C - 2^{\text{q}};$$

ε désignant l'excès des trois angles sur deux angles droits. Lorsque l'aire de la sphère est évaluée en triangles trirectangles (*Géom.* de M. Legendre, liv. VII), l'excès ε réduit en parties du quadrant exprime l'aire même du triangle : alors si S est la surface de la sphère,

donnée en mesures connues, on aura ε exprimée en mêmes mesures, pour le quatrième terme de cette proportion,

$$8^{q} : \varepsilon :: S : \frac{\varepsilon}{8^{q}} S;$$

puisque la surface de la sphère est composée de huit triangles trirectangles. Or, cette surface $S = 4\pi\rho^{2}$, ρ étant le rayon de la sphère, et π le rapport de la circonférence au diamètre. Donc, pour les triangles sphériques qui font partie de la surface du globe terrestre, on a, en mètres quarrés,

$$S = 4\pi\,(6366198)^{2}, \quad \text{et} \log \frac{S}{800} = 11{,}8038801,$$

ou plus exactement, en prenant le milieu entre les logarithmes des deux demi-axes de la Terre donnés par M. Delambre (*Base* du *Système métrique*, tom. III, pag. 196) et rapportés à l'art. 181,

$$\log S = \log 4\pi + 2\log 6{,}80387\ 92654 = 14{,}70696\ 83948;$$

ainsi $S = 50929380650$ hectares = surface du globe terrestre,

et $\log \frac{S}{800} = 11{,}80387\ 84078,$

ou bien, exprimant le quadrant en degrés sexagésimaux,

$$\log \frac{S}{8.90} = 11{,}84963\ 58984.$$

Ainsi, pour avoir l'aire d'un grand triangle sphérique, au logarithme de l'excès de ses trois angles sur deux angles droits, exprimé en grades ou en parties de grade, on ajoutera le logarithme constant 11,80387 84078, et la somme sera le logarithme de l'aire du triangle évaluée en mètres quarrés. On voit par là, avec quelle promptitude on obtiendra l'aire d'un polygone sphérique décomposé en triangles dont les angles sont connus.

Mais lorsque tous les points d'un réseau trigonométrique sont donnés par leurs distances à une méridienne et à sa perpendiculaire (art. 164), la surface d'un grand État se décompose en trapèzes sphériques, dans chacun desquels on connaît les trois côtés qui sont perpendiculaires entre eux.

Pour exemple, supposons que les côtés b, c qui comprennent l'angle

A (fig. 15) soient prolongés jusqu'à ce que les arcs $A\alpha, B\beta$ soient égaux chacun au quart de la circonférence; alors les angles α, β seront droits, et l'aire du triangle isocèle $A\alpha\beta$ qui, en général, $= A + \alpha + \beta - 2^{\text{q}}$ deviendra $= A$. L'aire du trapèze sphérique $\alpha\beta BC$, ou $A\alpha\beta - ABC$ sera donc $= 2^{\text{q}} - B - C$.

Mais, par les analogies de Néper, démontrées à l'art. 64, on a

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(B+C) = \cot\tfrac{1}{2}A\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)};$$

donc si l'on désigne par Σ l'aire du quadrilatère sphérique dont il s'agit, on aura

$$\text{tang}\,\frac{\Sigma}{2} = \cot\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{1}{\text{tang}\left(\frac{B+C}{2}\right)};$$

ensuite

$$\text{tang}\,\frac{\Sigma}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A;$$

et si l'on dénote par y, y' les deux côtés $B\beta$, $C\alpha$ du quadrilatère, perpendiculaires à la base $\alpha\beta = A$, en sorte que $y = 1^{\text{q}} - b$, $y' = 1^{\text{q}} - c$, on aura, pour la détermination de l'aire Σ, la formule

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{\sin\frac{1}{2}(y+y')}{\cos\frac{1}{2}(y-y')}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A.$$

Cette formule, que nous venons de démontrer d'après Lagrange (*Trigonom. sphér.*, pag. 276, 6e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*), est très utile pour mesurer les surfaces sphériques terminées par des arcs de grand cercle; pour en faire usage, il faudra évaluer l'amplitude de chacun des arcs y, y' donnés en mètres, ainsi que celle de l'arc de méridien $A = x' - x$ (art. 196). De cette manière, l'aire Σ sera donnée en grades ou en degrés; pour l'évaluer en mètres quarrés, l'on procédera comme il a été dit à l'art. 89.

De l'aire d'une zône sphérique.

209. On sait que l'aire d'une zône sphérique est égale à son épaisseur E multipliée par la circonférence d'un grand cercle. Soient donc H et H' les latitudes des bases de la zône, et supposons-les de même dénomination, puis désignons par ρ le rayon de la sphère; on aura

$$E = \rho\,(\sin H' - \sin H) = 2\rho\,\sin\tfrac{1}{2}(H'-H)\cos\tfrac{1}{2}(H'+H),$$
$$\text{circonférence} = 2\pi\rho;$$

partant, aire de la zône; ou

$$\Sigma = 4\pi\rho^2 \sin \tfrac{1}{2}(H' - H) \cos \tfrac{1}{2}(H' + H).$$

Calculons, à l'aide de cette formule, l'aire de la zône torride, de la zône glaciale et de la zône tempérée. La première étant bordée par les tropiques du Cancer et du Capricorne, les latitudes de ces deux cercles sont

$$\begin{array}{rl} H' = & +\ 23^\circ 28' \\ H = & -\ 23.28 \\ \hline \text{de là}\quad H' + H = & \quad 0.\ 0 \\ H' - H = & \quad 46.56\ , \quad \tfrac{1}{2}(H' - H) = 23^\circ 28'. \end{array}$$

Or, par ce qui précède,

$$\begin{array}{rl} \log 4\pi\rho^2 = & 14{,}70696\ 83948 \\ \text{de plus}\quad \text{l.}\sin \tfrac{1}{2}(H' - H) = & 9{,}60011\ 81358 \\ \text{l.}\cos \tfrac{1}{2}(H' + H) = & 0{,}\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ \hline \log \Sigma = & 14{,}30708\ 65306; \end{array}$$

donc surface de la zône torride $\Sigma = 20280867640$ hectares; nous avons ôté une dixaine du produit, pour satisfaire au principe de l'homogénéité (art. 46), et nous avons évalué la surface en hectares, en divisant par 10000 les mètres quarrés donnés immédiatement par $\log \Sigma$, ou, ce qui revient au même, en diminuant de 4 unités la caractéristique de ce logarithme.

Pour la zône tempérée boréale, qui est bordée par le cercle polaire arctique et le tropique du Cancer, on a

$$\begin{array}{rl} H' = & +\ 66^\circ 32' \\ H = & +\ 23.28 \\ \hline H' - H = & \quad 43.\ 4 \qquad \tfrac{1}{2}(H' - H) = 21^\circ 32' \\ H' + H = & \quad 90.\ 0 \qquad \tfrac{1}{2}(H' + H) = 45.\ 0. \\ \text{l.}\sin \tfrac{1}{2}(H' - H) = & 9{,}56471\ 63065 \\ \text{l.}\cos \tfrac{1}{2}(H' + H) = & 9{,}84948\ 50021 \\ \text{log.constant} = & 14{,}70696\ 83948 \\ \hline \log \Sigma = & 14{,}12116\ 97034; \end{array}$$

donc surface d'une des zônes tempérées $= 13218120440$ hectares.

Enfin, pour une des zônes glaciales, on a

$$\begin{aligned}
H' &= 90^\circ\ 0' \\
H &= 66.32 \\
\hline
H' - H &= 23.28 \qquad \tfrac{1}{2}(H' - H) = 11^\circ 44' \\
H' + H &= 156.32 \qquad \tfrac{1}{2}(H' + H) = 78.16 \\
\log.\sin \tfrac{1}{2}(H' - H) &= 9{,}30825\ 90190 \\
\log\cos \tfrac{1}{2}(H' + H) &= 9{,}30825\ 90190 \\
\log.\text{constant} &= 14{,}70696\ 83948 \\
\hline
\log \Sigma &= 13{,}32348\ 64328;
\end{aligned}$$

donc surface d'une zône glaciale = 2106136103 hectares.

Récapitulation.

Les deux zônes glaciales.....	4212272206 hectares.
Les deux zônes tempérées.....	26436240880
La zône torride.....	20280867640
Surface entière du globe.....	50929380726
Par le calcul direct.....	50929380650
Différence....	76

Cette différence de 76 hectares vient de ce que, dans les recherches des nombres correspondant aux logarithmes, nous n'avons eu égard qu'aux différences premières; ce qui est bien suffisant quand on ne veut, comme dans le cas actuel, que des résultats en nombres ronds.

De l'aire d'une portion de zône sphéroïdique.

210. Considérons, pour plus de généralité, la Terre comme un ellipsoïde de révolution, et cherchons l'aire Σ d'un quadrilatère formé sur le sphéroïde elliptique, par deux méridiens dont la différence de longitude $= p$, et par deux parallèles dont les latitudes sont o et H.

D'abord, en prenant toujours pour équation de l'ellipse génératrice du sphéroïde terrestre,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

l'axe de rotation sera celui des y; ainsi, la différentielle de l'aire Σ,

faisant partie de la zône entière engendrée par la révolution de l'arc s de l'ellipse autour du petit axe b, sera en général

$$d\Sigma = \frac{p}{2^Q}\pi x ds;$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon, Q désignant le quadrant, et x étant le rayon du parallèle à la latitude H exprimée en grades ou en degrés. Or, on a (art. 170)

$$x = \frac{a(1+n)^{\frac{1}{2}}\cos H}{(1+n\cos 2H)^{\frac{1}{2}}}, \quad ds = \frac{b^2(1+n)^{\frac{3}{2}}dH}{a(1+n\cos 2H)^{\frac{3}{2}}},$$

par conséquent, la différentielle de l'aire du quadrilatère proposé sera

$$d\Sigma = \frac{p}{2^Q}\pi b^2(1+n)^2\frac{dH\cos H}{(1+n\cos 2H)^2},$$

expression qui peut s'intégrer par séries ou par logarithmes. Supposons, comme à l'art. 172,

$$\frac{1}{(1+n\cos 2H)^2} = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\begin{array}{l}1+E_{(1)}\cos 2H+E_{(2)}\cos 4H\\ \qquad\qquad +E_{(3)}\cos 6H+\text{etc...}\end{array}\right\};$$

on aura

$$\Sigma = \frac{p\pi b^2}{2^Q}\frac{(1+n)^2}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}\int dH\left\{\begin{array}{l}\cos H+E_{(1)}\cos H\cos 2H\\ \qquad +E_{(2)}\cos H\cos 4H\\ \qquad +E_{(3)}\cos H\cos 6H+\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Transformant chacun des termes de cette série, au moyen de la relation $2\cos H\cos\mu H = \cos(\mu+1)H+\cos(\mu-1)H$; puis intégrant et remarquant que $\frac{1+n}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1+n}{1-n}} = \frac{a}{b}$ (art. 175), il viendra

$$\Sigma = \frac{p\pi ab}{2^Q}\cdot\frac{1}{1-n}\left\{\begin{array}{l}(1+\frac{1}{2}E_{(1)})\sin H+\frac{1}{2\cdot 3}(E_{(1)}+E_{(2)})\sin 3H\\ \qquad +\frac{1}{2\cdot 5}(E_{(2)}+E_{(3)})\sin 5H+\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Mais, d'après l'art. 172, on a

$$m = \frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}}, \text{ d'où } \sqrt{1-n^2} = \frac{n-m}{m};$$

on a aussi

$$\begin{aligned} E_{(1)} &= -\ 2n, \\ E_{(2)} &= \quad 2m\ (2n - m), \\ E_{(3)} &= -\ 2m^2\,(3n - 2m), \\ E_{(4)} &= \quad 2m^3\,(4n - 3m). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{2}E_{(1)} &= 1 - n, \\ E_{(1)} + E_{(2)} &= -\ 2m\left(\frac{n + m^2 - 2mn}{m}\right), \\ E_{(2)} + E_{(3)} &= \quad 2m^2\left(\frac{2n + 2m^2 - m - 3mn}{m}\right), \\ E_{(3)} + E_{(4)} &= -\ 2m^3\left(\frac{3n + 3m^2 - 2m - 4mn}{m}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

D'ailleurs, de $n = \frac{2m}{1 + m^2}$, on tire

$$n + m^2 = 2m - m^2 n + m^2;$$

ainsi

$$\begin{aligned} E_{(1)} + E_{(2)} &= -\ 2m\ [(1 - n)\ (2 + m)], \\ E_{(2)} + E_{(3)} &= +\ 2m^2\,[(1 - n)\ (3 + 2m)], \\ E_{(3)} + E_{(4)} &= -\ 2m^3\,[(1 - n)\ (4 + 3m)]; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et enfin

$$\Sigma = \frac{p\pi ab}{2^\varrho}\left\{\begin{aligned} &\sin H - \tfrac{1}{3}m(2+m)\sin 3H + \tfrac{1}{5}m^2(3+2m)\sin 5H \\ &\quad - \tfrac{1}{7}m^3(4+3m)\sin 7H + \text{etc.} \end{aligned}\right\}\ (1);$$

formule dans laquelle $m = \frac{a-b}{a+b}$ (art. 175). Si donc l'on employait l'aplatissement $\frac{1}{309}$, on aurait $m = \frac{1}{617}$, et $ab = \frac{308}{309}a^2$.

On obtient cette série régulière par un autre procédé, ainsi qu'il suit. Si, dans l'expression différentielle

$$d\Sigma = \frac{p}{2^\varrho}\pi x ds,$$

on met pour x et ds leurs valeurs respectives,

$$\frac{a\cos H}{(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{b^2 dH}{a(1 - e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}},$$

trouvées aux art. 167 et 169, on aura

$$d\Sigma = \frac{p}{2^Q} \frac{\pi b^2 d.\sin H}{(1 - e^2 \sin^2 H)^2}.$$

Or, en faisant $e \sin H = z$, il est évident que

$$d\Sigma = \frac{p\pi b^2 dz}{2^Q . e\,(1 - z^2)^2};$$

d'ailleurs

$$\frac{dz}{(1 - z^2)^2} = \left[\frac{1 + z^2}{2(1 - z^2)^2} + \frac{1}{2(1 - z^2)}\right] dz;$$

ainsi intégrant, il vient

$$\int \frac{dz}{(1 - z^2)^2} = \frac{z}{2(1 - z^2)} + \frac{1}{4} \log.\text{hyp}.\frac{1 + z}{1 - z};$$

et par conséquent

$$\Sigma = \frac{p}{4^Q} \pi b^2 \left[\frac{\sin H}{1 - e^2 \sin^2 H} + \frac{1}{2e} \log.\text{hyp}.\left(\frac{1 + e \sin H}{1 - e \sin H}\right)\right] \quad (2);$$

sans constante, parce qu'elle est nulle lorsque $H = 0$. Pour appliquer plus commodément les logarithmes ordinaires à cette expression, soit $e \sin H = \sin \varphi$; on aura, en faisant attention qu'il faut convertir, dans le second membre, le logarithme ordinaire du facteur du second terme en logarithme hyperbolique ou népérien,

$$\Sigma = \frac{p}{4^Q} \pi \frac{b^2}{e} \left[\frac{\tang^2 \varphi}{\sin \varphi} + \frac{1}{M} \log.\tang\,(50^g + \tfrac{1}{2}\varphi)\right] \quad (3),$$

M étant le module 0,434294 (art. 107).

Il résulte de là, que l'aire entière de l'ellipsoïde a pour expression

$$2\Sigma = 2\pi b^2 \left[\frac{1}{1 - e^2} + \frac{1}{2eM} \log\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)\right]$$
$$= 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{eM} \log\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right).$$

Mais, pour retrouver la série précédente, l'on remarquera d'abord qu'à cause de

$$\Sigma = \frac{p\pi b^2}{4^Q} \left[\frac{z}{e(1 - z^2)} + \frac{1}{e}\int \frac{dz}{1 - z^2}\right],$$

on a

$$\Sigma = \frac{p\pi b^2}{4^{\rho}}\left[\frac{\sin H}{1 - e^2 \sin^2 H} + \int \frac{dH \cos H}{1 - e^2 \sin^2 H}\right];$$

valeur qui, d'après l'art. 170, peut être mise sous cette forme :

$$\Sigma = \frac{p\pi b^2}{4^{\rho}}(1 + n)\left[\frac{\sin H}{1 + n \cos 2H} + \int \frac{dH \cos H}{1 + n \cos 2H}\right].$$

Or, en développant en série chacun des termes du second membre, puis faisant les transformations qui se présentent d'elles-mêmes, pour n'avoir que des cosinus linéaires, et intégrant, on retombera définitivement sur la série (1).

Il suit de là, qu'en désignant par H et H' les latitudes de deux parallèles, et par p, p' les longitudes de deux méridiens, l'aire $\Sigma_{(s)}$ du quadrilatère compris entre ces lignes, sera, en faisant d'ailleurs $\frac{1}{2}(H - H') = \varphi$, $\frac{1}{2}(H + H') = \Phi$,

$$\Sigma_{(s)} = \pi ab\left(\frac{p - p'}{1^{\rho}}\right)\left\{\begin{array}{l}\sin\varphi \cos\Phi - \frac{1}{3} m\,(2 + m) \sin 3\varphi \cos 3\Phi \\ \qquad + \frac{1}{5} m^2 (3 + 2m) \sin 5\varphi \cos 5\Phi \\ \qquad - \frac{1}{7} m^3 (4 + 3m) \sin 7\varphi \cos 7\Phi \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\};$$

série dont le terme général est évidemment

$$\pm \pi ab\left(\frac{p - p'}{1^{\rho}}\right)\left[\frac{1}{2i - 1} m^{i-1}[i + (i - 1)m] \sin(2i - 1)\varphi \cos(2i - 1)\Phi\right];$$

le signe supérieur ayant lieu lorsque i, qui est le nombre des termes, est impair, et le signe inférieur devant être pris dans le cas contraire. On a par là le moyen de calculer, avec une extrême facilité, l'aire de l'étendue d'un pays dont on a construit la carte à l'aide des latitudes et des longitudes. Par exemple, on peut embrasser dans un seul calcul la plus grande portion de cette étendue comprise entre deux méridiens et deux parallèles; ensuite évaluer, d'après des mesures prises sur l'échelle de la carte, les rapports que les parties du terrain figuré dans les quadrilatères partiels ont avec ces mêmes quadrilatères dont les surfaces s'exprimeront en mesures quarrées, à l'aide de la formule précédente (*).

(*) *Voyez*, pour l'expression de l'aire d'un ellipsoïde quelconque, les *Exercices de Calcul intégral* par M. Legendre, première partie, page 182.

211. Ceux qui voudront rechercher diverses expressions du volume d'un segment de sphéroïde terrestre, compris sous des bases parallèles au plan de l'équateur, n'auront pas de peine à les trouver d'après ce qui précède. Par exemple, si o et H sont les latitudes de ces bases, le volume V de ce segment sera donné par la formule suivante :

$$V = \pi \int x^2 dy = \pi b^2 \rho' \sin H.\left(1 - \frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}\frac{\sin^2 H}{1 - e^2 \sin^2 H}\right)$$
$$= \pi b^2 \rho' \sin H.\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\rho}{\rho'}\sin^2 H\right),$$

ou, par cette série régulière et simple,

$$V = \pi b^2 \rho' \sin H.\left[1 - \frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}\sin^2 H.(1 + e^2 \sin^2 H + e^4 \sin^4 H + \ldots)\right];$$

ρ' et ρ étant, comme à l'art. 187, les rayons de plus grande et de plus petite courbure de la surface du sphéroïde terrestre, au point dont la latitude est H.

Application numérique.

212. Étant données la différence $p - p'$ des méridiens extrêmes d'une portion de zône sphéroïdique et les latitudes H, H' des parallèles qui bordent cette portion de zône sur la Terre; évaluer en hectares l'aire $\Sigma_{(s)}$ qu'elle renferme.

Soient

$$p - p' = 5°18' = 5°,3, \quad H = 45°40'15'', \quad H' = 42°8'9'',$$
$$\text{aplatissement} = \tfrac{1}{309}, \ \log a = 6{,}80458\ 39646 \text{ en mètres},$$
$$m = \frac{a-b}{a+b} = \tfrac{1}{617}, \ \log b = 6{,}80317\ 45662;$$

on aura, en se bornant aux trois premiers termes de la série,

$$\Sigma_{(s)} = \pi ab\left(\frac{p-p'}{90°}\right)\left\{\begin{array}{l}\sin\varphi\cos\Phi - \frac{1}{3}m\ (2 + m)\sin 3\varphi\cos 3\Phi \\ \qquad + \frac{1}{5}m^2(3 + 2m)\sin 5\varphi\cos 5\Phi\end{array}\right\};$$

de là

$$
\begin{aligned}
H &= 45^\circ\,40'\,15'' \\
H' &= 42.\ 8.\ 9 \\
H - H' &= 3.32.\ 6 \\
\tfrac{1}{2}(H - H') &= 1.46.\ 3 = \varphi \ldots . 5\varphi = 5^\circ\,18'\ 9'' \\
H + H' &= 87.48.24 \\
\tfrac{1}{2}(H + H') &= 43.54.12 = \Phi \ldots . 3\Phi = 131.42.36 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 5\varphi = 8.50.15 \\
\tfrac{1}{3} m\,(2 + m) &= \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1235}{(617)^2} \qquad\qquad 5\Phi = 219.30.\ 0 \\
\tfrac{1}{5} m^2 (3 + 2m) &= \tfrac{1}{5} \cdot \frac{1853}{(617)^3}.
\end{aligned}
$$

Tous les élémens de la formule étant préparés, l'on procédera au calcul de chaque terme; et comme le premier est le plus considérable, on l'évaluera au moyen des grandes Tables de Vlacq à 10 décimales. Quant aux deux autres termes, il suffira de les calculer avec les Tables de Callet.

D'abord il est à remarquer que l'angle φ étant très petit, il convient, pour avoir son log-sinus exactement, de tenir compte des différences troisièmes. Or, les Tables citées donnent

log. sin 1°46′0″ = A	δA	$\delta^2 A$	$\delta^3 A$
8,48896 31630	68 21001	— 10704	+ 26
	68 10297	— 10678	
	67 99619		

et d'après l'art. 106, si y désigne le logarithme-sinus cherché, on aura

$$y = \underset{}{A} + \overset{(\mathrm{I})}{n\delta A} + \overset{(\mathrm{II})}{n.\frac{n-1}{2}\,\delta^2 A} + \overset{(\mathrm{III})}{n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\,\delta^3 A}.$$

D'ailleurs, les tables étant calculées de 10″ en 10″, on a évidemment $h = 10''$; et à cause de $nh = 3''$, il s'ensuit que $n = 0{,}3$. De là

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= 0{,}3 \times 6821001, & (\mathrm{II}) &= (-0{,}105) \times (-10704) \\
&= 2046300. & &= 1123{,}9.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{III}) &= (0{,}0595)\,(26) \\
&= 1{,}5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= 8{,}48896\ 31630 \\
(\mathrm{I}) &= +\ 20\ 46300 \\
(\mathrm{II}) &= +\ \ 1123{,}9 \\
(\mathrm{III}) &= +\ \ 1{,}5 \\
\log \sin 1^\circ 46' 3'' &= 8{,}48916\ 79055.
\end{aligned}
$$

Afin de faire remarquer la concordance des résultats obtenus par des méthodes différentes, cherchons derechef le sinus de 1°46′3″, par cette série

$$\log.\sin(a+x) = \log.\sin a + Mx\cot a\left(1 - \frac{x}{\sin 2a} + \ldots\right),$$

démontrée à l'art. 101. D'abord on a

$$a = 1°46',\ \log.\sin a = 8{,}48896\ 31630,\ x = 3'';$$

et ensuite, en calculant les deux termes en x, il vient

$$\begin{array}{rcl}
\log M &=& 9{,}6377843 \\
\log 3'' &=& 0{,}4771212 \\
c.\log R'' &=& 4{,}6855749 \\
l.\cot a &=& 1{,}5108304 \\
\hline
\log Mx\cot a &=& 6{,}3113108 = \quad + \quad 20\ 47910 \\
\log 3'' + c.\log R'' &=& 5{,}16270 \\
c.\log\sin 2a &=& 1{,}21021 \\
\hline
& & 2{,}68422 \quad = \quad - \qquad\qquad 483 \\
\hline
& & + \quad 20\ 47427 \\
\log a &=& 8{,}48896\ 31630 \\
\hline
\log 1°46'3'' &=& 8{,}48916\ 79057.
\end{array}$$

M. Delambre a donné, dans les Tables de Borda, les logarithmes sinus et tangentes de 10 minutes en 10 minutes centésimales pour tout le quart de cercle, avec onze décimales. On interpolerait par cette méthode entre ces logarithmes; mais alors on aurait

$$\text{compl. } \log R'' = 4{,}19611\ 987703.$$

Voici le calcul de log cos 43°54′12″.

On a $\qquad h = 10'',\ nh = 2'',\ n = 0{,}2;$

et, d'après les tables,

log.cos 43°54′10″	δA	$\delta^2 A$
9,85764 45297	— 202648	— 19
	— 202667	

de la

$$n\delta A = (0,2)(-202648) = - \quad 40529,6$$
$$n.\frac{n-1}{2}\delta^2 A = (-0,08)(-19) = + \quad 1,5$$
$$- \quad 40528,1$$
$$9,8576445297,0$$
$$\text{l.cos } 43^\circ 54' 12'' = 9,8576404769.$$

Quand les différences secondes sont presque constantes, comme dans ce dernier cas, l'on peut se contenter des différences premières ou de la méthode des parties proportionnelles; c'est ce qu'a fait M. Delambre, dans le calcul des triangles de la méridienne par les Tables de Vlacq.

Procédant maintenant au calcul de la formule $\Sigma_{(s)}$, on a

1er terme.		2e terme.	
$\log \pi =$	0,4971498727	log.fact. =	12,8749418
$\log a =$	6,8045839646	$\text{l}\,\frac{1}{3} =$	9,5228788 —
$\log b =$	6,8031745662	$\text{l.}\frac{1}{617} =$	7,2097148
$\log(p-p') =$	0,7242758696	*idem* =	7,2097148
$c.\log 90 =$	8,0457574906	l.1235 =	3,0916670
som. = log fact. =	12,8749417637	l.sin $3\varphi =$	8,9657379
l.sin $\varphi =$	8,4891679055	l.cos $3\Phi =$	9,8230571 —
l.cos $\Phi =$	9,8576404769	log 2e terme =	8,6977122 +.
log 1er terme =	11,2217501461.		

3e terme.

$$\text{log.facteur} = 12,8749418$$
$$\log\frac{1}{5} = 9,3010300 +$$
$$\text{l.}1853 = 3,2678754$$
$$3\log\frac{1}{617} = 1,6291444$$
$$\text{l.sin } 5\varphi = 9,1864834$$
$$\text{l.cos } 5\Phi = 9,8873019 -$$
$$6,1467769 -.$$

On trouve dans les Tables de Vlacq, que le premier terme de la formule est compris entre 16662 et 16663; ainsi $a = 16662$, et $h = 1$.

De plus,

			δA	$\delta^2 A$
log 1er terme,	$y =$	22175 01461		
log a,	$A =$	22172 71301	260642	— 16
	$y - A =$	2 30160	260626	

de là, et en vertu de l'art. 106,

$$n = \frac{y - A}{\delta A} = 0{,}883; \quad \frac{n-1}{2}\,\delta^2 A = (-0{,}0585)(-16) = 0{,}9;$$

et plus exactement

$$n = \frac{y - A}{260643} = 0{,}88304;$$

par suite,

$$\text{nombre cherché, ou } a + nh = 16662 + 0{,}88304$$
$$= 16662883040 0 \text{ mètres};$$

enfin,

$$\begin{aligned} 1^{er} \text{ terme} &= 16662883 \text{ hectares.} \\ 2^{e} \text{ terme} &= +\ 49856 \\ 3^{e} \text{ terme} &= -\ \ 140 \\ \text{surface } \Sigma_{(s)} &= 16712599 \end{aligned}$$

Il faut bien faire attention, que les sinus et cosinus des angles étant des fractions, l'on doit supprimer de la caractéristique des logarithmes, autant de dixaines qu'il existe de ces fractions comme facteurs. C'est pour cette raison que l'on a rejeté 5 dixaines de la somme des logarithmes qui composent le deuxième terme; et comme la soustraction a pu s'effectuer, la caractéristique 8 restante appartient nécessairement à un nombre de mètres composé de 9 chiffres. Mais toutes les fois que le nombre des dixaines d'une somme de logarithmes sera moindre que celui que l'on doit retrancher, la caractéristique représentée par le chiffre des unités appartiendra à une fraction.

Lorsqu'on veut donner plus d'exactitude au résultat que procure la méthode d'interpolation précédente, on prend trois différences premières consécutives, desquelles on déduit deux différences secondes; et si celles-ci diffèrent l'une de l'autre, leur demi-somme représente alors la valeur de $\delta^2 A$.

CHAPITRE XIX.

De la réfraction terrestre; moyen de la déterminer sur la Terre supposée sphérique.

213. Nous avons déjà fait observer (art. 17), que lorsqu'un rayon de lumière traverse obliquement l'atmosphère, il se détourne à chaque instant de la route qu'il suivait dans l'instant précédent, et décrit une courbe dont la concavité est tournée vers la surface de la Terre; parce que la force réfractive des couches atmosphériques est proportionnelle à leur densité. Un observateur qui reçoit l'impression de ce rayon, le voit par conséquent dans la direction de la tangente à la courbe ou trajectoire dont il s'agit. C'est cet effet que l'on nomme *réfraction*.

Dans la supposition que la densité de l'air est constante à la même hauteur au-dessus du niveau des mers, et que la Terre est sphérique, le rayon lumineux ne peut se mouvoir que dans un plan vertical; puisque ce plan partage symétriquement, en deux portions égales, toutes les couches atmosphériques. Cependant, les variations fréquentes et singulières que la densité de l'air éprouve près de la surface de la Terre, modifient tellement la trajectoire lumineuse, que de concave qu'elle est dans l'état ordinaire de l'atmosphère, elle devient quelque fois convexe, et nous fait voir alors les objets au-dessous de leur lieu réel; c'est le cas des réfractions extraordinaires. Il peut même arriver que cette trajectoire soit à double courbure, et qu'elle donne lieu à une réfraction latérale. Quelques observateurs, et M. Delambre principalement, attribuent à ce dernier phénomène une partie des écarts des séries d'un même angle entre deux objets terrestres. Cette déviation horizontale ne pouvant être évaluée, ce qu'il y a de mieux à faire pour éluder son influence, est, comme nous l'avons prescrit, de prendre plusieurs séries d'un même angle aux époques du jour où les réfractions extraordinaires sont le moins à redouter.

Les opérations géodésiques que j'ai faites en Italie et dans le Milanès, m'ont mis à même d'observer moi-même ce déréglement des réfractions terrestres. Les chaleurs d'été occasionnent continuellement des vapeurs qui s'exhalent de tous les petits canaux qui arrosent l'immense plaine de la Lombardie, et c'est pour ainsi dire un autre phénomène, que d'y voir l'atmosphère purifiée par les vents.

214. Voyons comment on mesure la réfraction terrestre, en supposant qu'elle n'ait lieu que dans le sens vertical.

Si du point A (fig. 44), on observe un objet terrestre B éloigné, le rayon lumineux qui en transmet l'image, suivra, d'après ce qui précède, la courbe BDA, et l'objet B sera vu dans la direction de la tangente à cette courbe, c'est-à-dire en B'. L'angle BAB' mesure donc l'effet de la réfraction sur la position de l'objet observé.

Dans la pratique de la Géodésie, la trajectoire BDA, dont il est impossible de connaître la nature, est heureusement toujours assez petite pour qu'elle puisse être assimilée à un arc de cercle, ou, ce qui est de même, être remplacée par son cercle osculateur; ainsi l'angle de réfraction $B'AB$, formé par une corde et une tangente, a pour mesure la moitié de l'arc AB soutendu par cette corde. Pour un objet D intermédiaire, la réfraction serait représentée par l'angle $B'AD$, qui aurait aussi pour mesure $\frac{1}{2}AD$. Il suit de là, que la réfraction terrestre en A est proportionnelle aux arcs AD, AB.

Maintenant si, par les points A, D, B, l'on conçoit les verticales AC, DC, BC qui passent par le centre C de la Terre, les arcs de distance ad, ab, faisant partie d'un grand cercle, seront, à très peu près, dans le même rapport que les arcs correspondans AD, AB de la trajectoire. Il est donc vrai de dire que la réfraction terrestre est proportionnelle à l'angle formé par les verticales des extrémités de la courbe de réfraction.

D'après cela, soit r la réfraction BAB' correspondante à l'amplitude C de l'arc terrestre ab; on aura en général

$$r = nC;$$

n étant un coefficient que l'expérience fait connaître, et qui est constant pour le même état de l'atmosphère.

Soit toujours C le centre de la Terre (fig. 45), A et B deux signaux.

Si du point A l'on observe le point B, celui-ci paraîtra en B' par l'effet de la réfraction; de même le point A paraîtra en A', observé du signal B.

Faisons les *distances apparentes* au zénit

$$ZAB' = \delta, \qquad VBA' = \delta',$$

et les angles de réfraction

$$BAB' = r, \qquad ABA' = r';$$

on aura, pour les *distances vraies* au zénit,

$$ZAB = \delta + r = D,$$
$$VBA = \delta' + r' = D';$$

donc

$$ZAB + VBA = \delta + \delta' + r + r' \qquad (1).$$

D'un autre côté, puisque l'angle extérieur d'un triangle vaut la somme des deux intérieurs opposés, on aura

$$ZAB = C + ABC,$$
$$VBA = C + BAC;$$

donc

$$ZAB + VBA = 2^{\text{q}} + C = D + D' \qquad (2).$$

Ce résultat nous apprend que les deux distances vraies au zénit surpassent deux angles droits d'une quantité précisément égale à l'arc de grand cercle mené d'un signal à l'autre.

Enfin des équations (1) et (2), l'on conclut

$$\delta + \delta' + r + r' = 2^{\text{q}} + C;$$

ou bien, à cause que r est sensiblement égal à r',

$$r = \frac{C}{2} - \frac{1}{2}(\delta + \delta' - 2^{\text{q}}) \qquad (3).$$

Divisant tout par C, l'on aura

$$\frac{r}{C} = \frac{\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(\delta + \delta' - 2^{\text{q}})}{C} = n \qquad (4),$$

et enfin, $r = nC$.

n varie d'une manière très irrégulière, et il paraît impossible de

parvenir à assigner la loi de ces variations d'après les indications du baromètre et de l'hygromètre. M. Delambre a remarqué en France, que n a environ pour valeur moyenne 0,07876, ou simplement 0,08. Il a quelquefois trouvé par des tems brumeux 0,15, et en hiver seulement; plus communément 0,06 à 0,08 en été, et 0,08 à 0,10 en hiver. D'autres observateurs ont même trouvé 0,5 par les tems de pluie. Si n était négatif, la réfraction abaisserait les images des objets, au lieu de les élever; mais ce phénomène est rare.

Il suit de ce qui précède, que

$$ZAB = \delta + r = 1^{\circ} + \tfrac{1}{2}\,C + \tfrac{1}{2}\,(\delta - \delta'),$$
$$ZBA = \delta' + r' = 1^{\circ} + \tfrac{1}{2}\,C - \tfrac{1}{2}\,(\delta - \delta').$$

Il serait sans doute nécessaire que les distances zénitales des points A et B fussent prises au même moment par deux observateurs; mais, comme il est très difficile de recueillir des observations réciproques et simultanées de ce genre, on prend à chaque station plusieurs séries dans les circonstances atmosphériques les plus favorables, par exemple, vers le milieu de la journée et par un beau tems, et alors la moyenne des résultats de ces séries (art. 118) est celle qu'on emploie, soit dans le calcul du coefficient n de la réfraction, soit pour déterminer les différences de niveau.

215. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les cercles étaient placés aux sommets des signaux, et c'est ce qui n'a pas lieu dans la pratique. Si, par exemple, le centre du cercle est au point a, dans l'axe du signal, la distance vraie du point B au zénit est ZaB, et sa distance apparente observée $= ZaB'$; désignons celle-ci par Δ, l'on aura évidemment

$$ZAB' = ZaB' + AB'a = \Delta + AB'a;$$

reste donc à déterminer l'angle $AB'a$, qui est l'erreur commise.

Soient $AB' = AB = K$, $Aa = dH$ et $AB'a = d\Delta$; le triangle $AB'a$ donnera

$$\sin d\Delta = \frac{dH \sin \Delta}{K}.$$

Prenant l'arc pour le sinus, et réduisant en secondes, il viendra

$$d\Delta = \frac{dH \sin \Delta}{K \sin 1''} \qquad (5).$$

Lorsque les triangles sont calculés suivant la méthode de l'art. 155, on obtient la corde de l'angle C pour une sphère dont le rayon est la distance de l'horizon de la mer au centre de la Terre, et cette corde est plus courte que la distance $aB = K$. Pour évaluer l'erreur, on pourrait rendre $d\Delta$ fonction de la corde connue et du rayon de la Terre (*Mémoire sur la détermination d'un Arc du méridien*, par M. Delambre, page 92); mais il sera suffisant, dans tous les cas, d'employer la formule précédente, en faisant abstraction de la différence de l'arc à la corde.

La correction précédente étant appliquée aux deux distances au zénit observées, on aura, pour celles qui l'auraient été aux sommets des signaux,

$$ZAB' = \Delta + d\Delta = \delta,$$
$$VBA' = \Delta' + d\Delta' = \delta'.$$

Bien entendu qu'il faudrait prendre $d\Delta$ et $d\Delta'$ négativement, s'il s'agissait de réduire les distances zénitales aux pieds des signaux; et comme l'on fait toujours en sorte de mettre le cercle le plus près possible de l'axe du signal, l'on n'a aucun égard, dans le calcul de cette réduction, à l'erreur d'excentricité, parce qu'elle est d'une extrême petitesse, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer.

Telles sont les valeurs à employer dans les formules (3) et (4), pour estimer la réfraction; mais, pour rendre cette théorie complète, indiquons les moyens de déterminer dH ou la hauteur du signal au-dessus de la lunette, lorsque cette hauteur ne peut être mesurée directement.

S'il s'agit d'une flèche qui ait peu d'élévation, on mesurera le diamètre à deux hauteurs différentes, ainsi que la différence des deux hauteurs, et l'on considérera cette flèche comme la pointe d'un cône tronqué. Or, soient D, D' les diamètres inférieur et supérieur, h la distance des deux bases, x la partie du clocher qui s'élève au-dessus du diamètre supérieur D'; on aura, ainsi qu'il est démontré dans tous les élémens de Géométrie,

$$x = \frac{hD'}{D - D'}.$$

Mais lorsque la pointe de la flèche est très élevée, une petite erreur sur la détermination des quantités $D - D'$ et h, pourrait en occasionner une très grande sur la hauteur x. Alors soit B (fig. 46)

la pointe de la flèche observée du point A, B' la galerie où a été placé le cercle : on mesurera les angles ZAB, ZAB', et BAB' sera la différence des deux distances au zénit : or, le triangle ABB' donne

$$BB' = \frac{AB' \sin A}{\sin B};$$

mais AB' est très peu différent de $ab' = K$, et l'on a $AB'B = \delta' + r'$, $ZAB' = \delta + r$; donc $B = 2^{\text{o}} - A - (\delta' + r')$; donc BB' ou

$$dH = \frac{K \sin A}{\sin(\delta' + r' + A)} = \frac{K \sin A}{\sin\left[1^{\text{o}} + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}(\delta' - \delta) + A\right]}$$
$$= \frac{K \sin A}{\sin\left[1^{\text{o}} - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(\delta' - \delta) - A\right]} = \frac{K \sin A}{\cos\left[\frac{1}{2}(\delta' - \delta) + \frac{1}{2}C + A\right]}.$$

Développant le dénominateur par la formule connue du cosinus de la somme de deux arcs, on aura

$$dH = \frac{K \sin A}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)\cos A - \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)\sin A};$$

ou bien

$$dH = \frac{K \operatorname{tang} A}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}\left[1 - \operatorname{tang} A \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)\right]^{-1};$$

mais $\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)$ étant un très petit angle, on peut se contenter du premier terme de la série; donc assez exactement

$$dH = \frac{K \operatorname{tang} A}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}.$$

M. Delambre fit usage de cette formule pour déterminer les hauteurs des flèches d'Amiens et d'Orléans; il observait dH de deux stations voisines, et prenait le milieu entre les deux résultats dont la différence était légère. Dans tous les cas semblables, il faut faire en sorte de se placer le plus près possible du point de mire, afin que la réduction à ce point soit plus sûre.

Calcul de la réfraction terrestre.

216. A 17^{m} au-dessous du sommet du signal A (fig. 45), on a observé la distance au zénit $100^{\text{g}},2408$ du sommet du signal B; réciproquement à $15^{\text{m}},1$ au-dessous de l'extrémité supérieure du

signal B, on a observé la distance au zénit $99^g,9259$ du point A : la distance rectiligne entre les deux signaux étant de $28504^m,75 = K$, on demande la valeur de la réfraction et celle de son coefficient?

Pour réduire les distances au zénit aux sommets des signaux, on fera usage de la formule (5) : ainsi, par rapport au signal A, on a

$$dH = 17^m, \qquad \Delta = 100^g,2408,$$

et par rapport au signal B,

$$dH' = 15^m,1, \qquad \Delta' = 99^g,9259;$$

$$\begin{aligned}
\log dH &= 1,23045 \\
l \sin \Delta &= 9,99999 \\
c \log K &= 5,54508 \\
c.\log \sin 1'' &= 5,80388 \\
\hline
\log d\Delta &= 2,57940 = 379'',67 \\
\Delta &= 100^g,240800 \\
+ d\Delta &= 0,037967 \\
\hline
\text{Réduction au sommet } A &\Big\} \; 100^g,278767 = \delta
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log dH' &= 1,17898 \\
l \sin \Delta' &= 9,99999 \\
c \log K &= 5,54508 \\
c.\log \sin 1'' &= 5,80388 \\
\hline
\log d\Delta' &= 2,52793 = 337'',24 \\
\Delta' &= 99^g,925900 \\
+ d\Delta' &= 0,033724 \\
\hline
\text{Réduction au sommet } B &\Big\} \; 99^g,959624 = \delta'.
\end{aligned}$$

Lorsque les distances apparentes au zénit sont réduites aux sommets des signaux, on emploie les formules (3) et (4) pour avoir la réfraction r et son coefficient n. On ne peut, à cet égard, espérer d'arriver à des résultats bien concluans, que quand tous les élémens des deux formules dont il s'agit, ont été recueillis avec les attentions les plus scrupuleuses. Ce qui nuit singulièrement à la bonté des observations et les rend très discordantes, c'est lorsqu'elles sont faites dans les momens où les objets sont fortement ondulans.

Les formules citées exigent que l'on connaisse l'angle au centre C exprimé en parties du grade. Or, la distance K entre les deux signaux A et B, $= 28504^m,75$; et l'on a C, réduit en secondes, à l'aide de la formule $C = \frac{KR''}{\varrho} = \frac{K}{\varrho \sin 1''}$,

partant,
$$\begin{aligned}
\log K &= 4,4549172 \\
c.l.\sin 1'' &= 5,8038801 \\
c \log \rho &= 3,1954695 \\
\hline
& \quad 3,4542668 = 2846'',21.
\end{aligned}$$

La distance AB répond donc à un arc de $28'46'',21$.

Pour plus d'exactitude, on fera bien de prendre pour ρ le rayon de la Terre dont nous avons donné la valeur moyenne à l'art. 130; ou bien encore employer le rayon de courbure de l'arc K, pour le lieu de l'observation (art. 187).

Voici maintenant le calcul de la réfraction r et du coefficient n.

On a, par ce qui précède,

$$(3) \qquad r = \frac{C}{2} - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta' - 200^g),$$

$$(4) \qquad n = \frac{r}{C},$$

et en vertu des valeurs trouvées ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\delta &= 100^g,2787^m,67 \\
\delta' &= 99\ ,9596\ ,24 \\
\delta + \delta' - 200 &= 0\ ,2383\ ,91 \\
\tfrac{1}{2}(\delta + \delta' - 200) &= -0\ ,1191\ ,95 \\
\tfrac{1}{2}C &= +0\ ,1423\ ,10 \\
r &= +0\ ,0231\ ,15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log r &= 8{,}36389 \\
c \log C &= 0{,}54573 \\
\log n &= 8{,}90962 \\
\text{donc } n &= 0{,}0812\ldots\ldots\ldots\ldots = \tfrac{1}{12} \text{ environ.}
\end{aligned}$$

Ainsi, quand la réfraction est constante, on a

$$r = nC = (0{,}08)\ C.$$

La recherche des lois de la réfraction intéresse singulièrement l'Astronomie. Les premiers succès en ce genre sont dus à Lambert; mais ensuite Euler et Lagrange sont parvenus à déterminer, d'une manière plus rigoureuse, la trajectoire décrite par un rayon de lumière qui traverse l'atmosphère. Enfin, M. Laplace a perfectionné et complété cette théorie, dans le dixième livre de sa *Mécanique céleste :* nous en donnerons une idée par la suite.

La réfraction terrestre présente, dans certains états de l'atmosphère, des phénomènes très singuliers, et dignes de toute l'attention des physiciens géomètres. *Voyez* à ce sujet un ouvrage que M. Biot a publié sous ce titre : *Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon.*

CHAPITRE XX.

Détermination des différences de niveau, par les procédés trigonométriques.

217. Deux ou plusieurs points sont dits de *niveau* entre eux, lorsqu'ils appartiennent à une même surface semblable et concentrique à celle des eaux tranquilles de la mer; et une droite perpendiculaire à la direction de la pesanteur est dite une *ligne horizontale* ou une *ligne de niveau apparent*. En supposant que la Terre soit une véritable sphère, toutes les verticales ou lignes de gravitation passent par son centre; mais si on regarde le globe terrestre comme un sphéroïde engendré par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe, les verticales sont des normales à la surface de ce sphéroïde.

Ces définitions étant bien comprises, il s'agit de procéder à la recherche des formules propres à la détermination des différences de niveau dans chacune des deux hypothèses précédentes, afin de juger avec connaissance de cause du degré de précision qu'on peut obtenir dans les deux cas.

1re HYPOTHÈSE.

La Terre étant sphérique.

218. Soit C (fig. 46) le centre de notre globe réputé sphérique, et A, B deux points inégalement éloignés de ce centre. Si AB' est une ligne de *niveau vrai* ou un arc terrestre, la hauteur $BB' = dN$ sera la *différence de niveau* des deux points A, B. Or, par les opérations géodésiques, on connaît la plus courte distance de ces points, ainsi que leurs distances zénitales réciproques, ou tout au moins l'une d'elles; on a donc tout ce qu'il faut pour déterminer dN.

En effet, représentons par δ la distance zénitale apparente du point B, observée de la station A; par δ' la distance zénitale apparente du point A, observée de B; par C l'angle que forment les

deux verticales passant par A et B et se coupant au point C; par ρ le rayon de la sphère dont la surface s'écarte le moins possible de celle de la Terre aux lieux des observations; par r, r' les réfractions dont les distances apparentes δ, δ' se trouvent respectivement affectées; enfin par D, D' les distances vraies $\delta + r$, $\delta' + r'$; et supposons d'abord $D < D'$: le triangle rectiligne ABC donnera

$$\sin D' : \rho :: \sin D : \rho + dN,$$

d'où

$$dN = \rho \left(\frac{\sin D - \sin D'}{\sin D'}\right).$$

Puis à cause de $\sin D - \sin D' = 2\cos\left(\frac{D+D'}{2}\right)\sin\left(\frac{D-D'}{2}\right)$, et de $\frac{D+D'}{2} = 100^g + \frac{C}{2}$ (art. 214), ou de $\cos\left(\frac{D+D'}{2}\right) = -\sin\frac{C}{2}$, on aura

$$dN = \frac{2\rho \sin\frac{C}{2}\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\sin(200-D')} = \frac{2\rho\sin\frac{C}{2}\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D-D'-C)}.$$

Mais en général

$$\cos(x) = \cos(-x), \text{ et } \sin\frac{C}{2} = \left(\frac{C}{2}\right) - \frac{1}{2.3}\left(\frac{C}{2}\right)^3 + \ldots;$$

de plus $\rho C = K_1$, K_1 étant l'arc qui mesure la distance des stations A, B, et dont la corde est K; ainsi $2\rho\sin\frac{C}{2} = K$, et

$$dN = \left(K_1 - \frac{K_1^3}{24\rho^2}\right)\frac{\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D'-D+C)},$$

ou

$$dN = \frac{K\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D'-D+C)} \qquad (1).$$

Supposons maintenant $D > D'$; le triangle ABC (fig. 46 *bis*) donnera

$$\sin D : \rho :: \sin D' : \rho + dN;$$

par conséquent

$$dN = \rho\left(\frac{\sin D' - \sin D}{\sin D}\right);$$

et par suite, en procédant comme ci-dessus, ou, ce qui est plus simple, changeant dans le résultat précédent D en D', *et vice versâ*,

puis supposant qu'on nivelle en allant de A en B,

$$dN = \left(K_1 - \frac{K_1^3}{24\varepsilon^2}\right) \frac{\sin\frac{1}{2}(D' - D)}{\cos\frac{1}{2}(D - D' + C)},$$

ou

$$dN = K \frac{\sin\frac{1}{2}(D' - D)}{\cos\frac{1}{2}(D - D' + C)} \qquad (2).$$

Si l'on compare cette valeur à la précédente (1), l'on reconnaîtra que celle-ci est négative et que l'autre est positive, mais que dans le dénominateur, la différence $D' - D$ doit toujours être prise positivement, lorsque l'on emploie pour K la distance des deux stations réduite au point le plus bas. Or, par le calcul d'un réseau trigonométrique, K est nécessairement réduit au niveau de la mer (art. 141), et est alors représenté par ab'. Ainsi la différence de niveau $BB' = dN$, obtenue à l'aide de $K = ab'$, est un peu trop petite, puisqu'elle devrait l'être au moyen de AB'; mais dans la pratique, on peut, sans inconvénient, faire abstraction de la très petite différence des deux cordes ab', AB'.

Afin de comprendre ces deux formules dans une seule, et de les assujétir à l'hypothèse présente, nous écrirons

$$(3) \quad dN = \frac{K \sin\frac{1}{2}(D' - D)}{\cos\frac{1}{2}(D' \backsim D + C)}, \text{ ou bien } dN = \frac{K \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta' \backsim \delta + C)}.$$

La réfraction ne modifie en rien ce résultat, puisque, d'après ce qui a été dit à l'art. 214, on peut supposer $r = r'$. On entendra par le signe $\backsim$, que la différence $\delta' \backsim \delta$ qui entre au dénominateur, doit toujours être considérée comme positive et s'ajouter à l'angle C. Ainsi, le signe de dN, qui dépend uniquement de celui du numérateur $\sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$, sera positif ou négatif selon que l'angle $\delta' - \delta$ sera lui-même positif ou négatif.

A moins que K ne soit très grand, on est dans l'usage de calculer dN par la formule approximative suivante :

$$(4) \qquad dN = K \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta - \delta'),$$

qu'on obtient, en supprimant C au dénominateur de la formule (3). Si l'on voulait réduire celle-ci en série, on la mettrait d'abord sous cette forme :

$$dN = \frac{K \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta)\cos\frac{1}{2}C - \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta)\sin\frac{1}{2}C};$$

après quoi l'on aura visiblement

$$(A) \qquad dN = \frac{K \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2} C \left[1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \operatorname{tang} \frac{1}{2} C\right]},$$

et ensuite

$$(5) \quad dN = \frac{K \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2} C} \left[1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C)\right]^{-1}$$
$$= \frac{K \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2} C} + K \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C \operatorname{séc} \tfrac{1}{2} C + \ldots;$$

d'où l'on voit qu'en s'arrêtant au premier terme du développement, et supposant $\cos \frac{1}{2} C = 1$, on a la formule (4).

219. Si l'une des distances zénitales et la différence de niveau dN étaient connues, et qu'il fallût avoir l'autre distance zénitale, pour réduire à l'horizon un angle observé entre deux objets inégalement élevés, la formule (A) donnerait sur-le-champ

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = \frac{\frac{dN}{K} \cos \frac{1}{2} C}{1 + \frac{dN}{K} \sin \frac{1}{2} C};$$

et par la méthode de l'art. 93, on aurait, en série et en secondes,

$$\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = \frac{dN}{K} \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin 1''} - \left(\frac{dN}{K}\right)^2 \frac{\sin \frac{2}{2} C}{\sin 2''} - \left(\frac{dN}{K}\right)^3 \frac{\cos \frac{3}{2} C}{\sin 3''} + ;$$

on pourrait bien dans ce cas se contenter du premier terme.

L'usage du théodolite rend ce calcul inutile, puisque les angles observés avec cet instrument, se trouvent réduits à l'horizon (art. 125); et ce qu'il y a d'avantageux, sous un autre rapport, c'est que la réfraction, dans le sens vertical, ne peut jamais troubler l'accord des séries. Mais est-ce là un motif assez puissant pour négliger d'observer les distances zénitales au cercle répétiteur de Borda?

220. Ne faisons maintenant dépendre la série (5), que de la seule distance zénitale δ, et dans cette vue, rappelons-nous que $\delta + r = 1^\circ + \frac{1}{2} C - \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$; on aura tout d'abord, en éliminant $\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = 1^\circ - (\delta + r - \frac{1}{2} C)$,

$$(6) \qquad dN = K \operatorname{séc} \tfrac{1}{2} C \cot(\delta + r - \tfrac{1}{2} C)$$
$$+ K \operatorname{séc} \tfrac{1}{2} C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C \cot^2 (\delta + r - \tfrac{1}{2} C) + \ldots$$

Dans la pratique, le premier terme suffit le plus souvent, et même on a sensiblement séc $\frac{1}{2}C = 1$; partant

$$(7) \qquad dN = K \cot(\delta + r - \tfrac{1}{2}C),$$

ou en introduisant le coefficient n de la réfraction (art. 214),

$$(7') \qquad dN = K \cot\left(\delta + \frac{2n-1}{2}C\right);$$

le signe de dN dépendra donc de celui de $\left(\delta + \frac{2n-1}{2}C\right)$.

Lorsque la valeur numérique du coefficient de la réfraction ne peut se déduire d'aucune observation directe, faite à l'époque où les distances zénitales ont été prises, on la suppose ordinairement de $+$ 0,08. Dans le cas d'une réfraction extraordinaire, n peut être négatif; mais il n'y a que l'observation qui puisse véritablement faire connaître ce coefficient et le signe dont il doit être affecté.

221. M. Laplace a donné, dans sa *Mécanique céleste* (tom. IV, pag. 279), une formule analogue à la dernière ci-dessus; on peut y arriver aisément par le procédé suivant :

Si l'on développe le second membre de la formule (7), de manière à dégager la réfraction, l'on aura

$$\begin{aligned}
dN &= K\left(\frac{1 - \operatorname{tang}\left(\delta - \frac{C}{2}\right)\operatorname{tang} r}{\operatorname{tang}\left(\delta - \frac{C}{2}\right) + \operatorname{tang} r}\right) \\
&= K\cot\left(\delta - \frac{C}{2}\right)\left[1 - \operatorname{tang}\left(\delta - \frac{C}{2}\right)\operatorname{tang} r - \cot\left(\delta - \frac{C}{2}\right)\operatorname{tang} r\right] \\
&= K\cot\left(\delta - \frac{C}{2}\right)\left[1 - \operatorname{tang} r\,\frac{\operatorname{séc}^2\left(\delta - \frac{C}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\delta - \frac{C}{2}\right)}\right] \\
&= K\cot\left(\delta - \frac{C}{2}\right) - \frac{K\operatorname{tang} r}{\sin^2\left(\delta - \frac{C}{2}\right)},
\end{aligned}$$

quand on néglige toutefois les autres termes de la série. D'un autre côté, à cause de C très petit dans la pratique, et de $r = nC = n\frac{K}{\varrho}$, on a simplement

$$(8) \quad dN = K\cot\left(\delta - \frac{C}{2}\right) - \frac{nK^2}{\varrho\sin^2\delta} = K\cot\delta + \frac{K^2}{2\varrho\sin^2\delta} - \frac{nK^2}{\varrho\sin^2\delta},$$

ou ce qui est encore permis,

$$(8') \qquad dN = K \cot \delta + \frac{K^2}{2\varrho} - \frac{nK^2}{\varrho}.$$

Ce résultat met en évidence et le terme dépendant de la sphéricité de la Terre, savoir $\frac{K^2}{2\varrho}$, et celui qui est produit par la réfraction, savoir $-\frac{nK^2}{\varrho}$. Il serait donc facile de former une petite table pour différentes valeurs de n, s'il n'était pas plus simple de calculer immédiatement dN par la formule (7').

Lorsque l'on prend pour ρ sa valeur en toises, on a $\log \rho = 6{,}51549$, et si l'on suppose $n = 0{,}08$, la formule (8) devient

$$dN = K \cot \delta + 0{,}00000\,0128 \frac{K^2}{\sin^2 \delta};$$

si l'on veut au contraire un résultat en mètres, on a

$$dN = K \cot \delta + 0{,}00000\,006587 \frac{K^2}{\sin^2 \delta}:$$

on voit donc que le second terme est proportionnel au quarré de la distance K.

Un autre avantage de la formule (8) est de donner la valeur du coefficient de la réfraction, quand on connaît dN, K et la distance zénitale apparente δ : en effet, soit $K \cot \delta = dN'$; on a

$$(9) \qquad 1 - 2n = \frac{2\varrho \sin^2 \delta . (dN - dN')}{K^2}.$$

Mais rien ne prouve que n soit constant pour toutes les trajectoires lumineuses qu'on peut concevoir, au même moment, autour du lieu de l'observation.

222. Lorsqu'on aperçoit l'horizon de la mer, d'un lieu élevé d'où l'on observe, il est facile d'obtenir la hauteur de ce lieu au-dessus des eaux, au moyen de l'angle observé entre l'horizon et le zénit, si l'on connaît d'ailleurs le coefficient de la réfraction; voici comment :

Si, par le point B de l'observateur (fig. 47), l'on imagine une tangente BA à la surface de la mer, le rayon terrestre $CA = \rho$ sera évidemment perpendiculaire à AB. Si l'on imagine en outre une ligne de niveau, ou un arc terrestre AB' compris entre le point A et la verticale VB, la hauteur cherchée sera $BB' = N$. Or, faisant comme à l'ordinaire la distance zénitale vraie $VBA = D = \delta + r$, δ étant la distance apparente observée et r la réfraction; le triangle rectangle CAB donnera, à cause de l'angle $CBA = 1^{\text{q}} - C$, et de $CA = \rho$,

$$CB = \frac{\rho}{\sin(1^{\text{q}} - C)} = \frac{\rho}{\cos C}.$$

Mais $BB' = N = CB - \rho$, par conséquent

$$N = \rho\,\frac{(1 - \cos C)}{\cos C} = \rho.\frac{2\sin^2 \frac{1}{2} C}{\cos C}$$
$$= \rho.\frac{2\sin^2 \frac{1}{2} C \sin C}{\sin C \cos C} = \rho \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C \operatorname{tang} C.$$

Quelle que soit la hauteur de la montagne, la distance zénitale qui aura pu être observée du sommet, sera toujours peu différente de l'angle droit; ainsi l'angle C sera très petit. Mais parce qu'en général $\operatorname{tang} mx = m \operatorname{tang} x$, lorsque x est un fort petit arc, et m un coefficient peu différent de l'unité, on a sensiblement

$$N = \tfrac{1}{2} \rho \operatorname{tang}^2 C.$$

De plus, à cause de $C = \delta + r - 1^{\text{q}} = \delta + nC - 1^{\text{q}}$ (art. 214), on a

$$C = \frac{\delta - 1^{\text{q}}}{1 - n};$$

enfin,

$$(10) \qquad N = \tfrac{1}{2} \rho \frac{1}{(1-n)^2} \operatorname{tang}^2 (\delta - 1^{\text{q}}),$$

ou à très peu près

$$N = \tfrac{1}{2} \rho (1 + n)^2 \operatorname{tang}^2 . \textit{dépression apparente}.$$

Toutes ces formules, dues à M. Delambre, et très utiles en Géodésie, sont fondées sur l'hypothèse d'une égale réfraction aux extrémités du rayon visuel; ce qui ne peut être rigoureusement vrai, sur-tout quand la différence de niveau des deux stations est considérable. L'illustre auteur de la *Mécanique céleste* a donné des

formules plus rigoureuses pour ce dernier cas; nous les ferons connaître plus tard.

223. On voit par ce qui précède, de quelle manière on déterminera les élévations des sommets des signaux au-dessus d'un même horizon, de celui de la mer, par exemple : ainsi, en en retranchant les hauteurs des signaux, on aura celles du sol au-dessus du niveau de l'Océan.

En attendant que nous donnions un exemple de ce calcul, supposons que les points B, B', B'',..... $B^{(n)}$ soient inégalement élevés au-dessus d'une même surface de niveau, en sorte que h' soit l'élévation du point B' au-dessus du niveau de B; h'' l'élévation du point B'' au-dessus du niveau de B'; d''' la dépression du point B''', par rapport au niveau B'', et ainsi de suite; il est évident alors qu'on aura généralement pour la différence de niveau des deux points extrêmes, $H - D$, en prenant positivement les hauteurs h, et négativement les dépressions d supposées observées de gauche à droite. Si la différence $H - D$ est affectée du signe $+$, le point extrême $B^{(n)}$ sera au-dessus du niveau de B; et si elle est affectée du signe $-$, le point $B^{(n)}$ sera au-dessus du même niveau.

Concluons de là, que si N est la hauteur du point B au-dessus du niveau de la mer, $N + H - D$ sera la hauteur de tout autre point au-dessus de ce niveau.

Toute hauteur au-dessus de la mer se nomme *hauteur absolue*, et la différence de niveau de deux points s'appelle en général *hauteur relative*.

Calculs des différences de niveau.

224. Toutes choses étant égales, comme dans l'art. 216, on demande la différence de niveau des sommets des deux signaux A et B (fig. 45). Cette différence est donnée par la formule exacte (4)

$$dN = \frac{K \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' \backsim \delta + C)},$$

$$\begin{aligned} \delta' &= 99^g,959624 \\ \delta &= 100,278767 \\ \delta' - \delta &= + \ 0,319143 \\ C &= + \ 0,284621 \\ \delta' - \delta + C &= + \ 0,603764 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log K &= 4,4549171 \\ \text{l.} \sin \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) &= - \ 7,3990750 \\ c.\,\text{l.} \cos \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta + C) &= + \ 0,0000049 \\ & - \ 1,8539970 \end{aligned}$$

Donc... $dN = - 71^m,449$.

Cherchons encore cette différence de niveau par la série (5), ou

$$dN = \frac{K \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2} C} + \text{etc.}$$

1er terme.	2e terme.
$\log K = 4{,}4549171$	$\log dN = 1{,}85399$
$\text{l.tang} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) = 7{,}3990778$ —	$\text{l.tang} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) = 7{,}39908$
$\text{c.l.cos} \frac{1}{2} C = 0{,}0000002$	$\text{l.tang} \frac{1}{2} C = 7{,}34933$
$\log dN = 1{,}8539951 = -71^m{,}448$	$\log 2^e \text{ terme} = 6{,}60240 +$.

Le second terme est négligeable, puisqu'il ne vaut que $+ 0^m{,}0004$; ainsi, le point B est plus bas que le point A, de $71^m{,}45$. Nous aurions pu borner tout ce calcul à 5 décimales.

Si l'on ne connaissait que la distance au zénit δ, prise au point A, il faudrait recourir à la formule (6), ou à celle (7). Dans ce dernier cas et en supposant le coefficient n de la réfraction $= 0{,}08$, on aurait

$$dN = K \cot(\delta + 0{,}08\, C - 0{,}5\, C) = K \cot(\delta - 0{,}42\, C),$$

$\delta = 100^g{,}278767$	$\log K = 4{,}45492$
$-0{,}42\, C = -\ 0{,}119541$	$-\text{l.tang } 15',9226 = -\ 7{,}39813$
$\delta - 0{,}42\, C = -\ 100{,}159226$	$-\ 1\ 85305 = -71^m{,}29$.

Enfin, si l'on n'avait que δ', et que l'on nivelât de A en B, on aurait la différence cherchée par la formule

$$dN = -K \cot(\delta' + r - \tfrac{1}{2} C),$$

$\delta' = 99^g{,}959624$	$-\log K = -\ 4{,}45492$
$-0{,}42\, C = -\ 0{,}119541$	$+\text{l. tang } 15',9917 = +\ 7{,}40001$
$\delta' - 0{,}42\, C = 99{,}840083$	$-\ 1{,}85493 = -71^m{,}60$.

En prenant un milieu entre ces deux derniers résultats, l'on retombe sur le premier : ils seraient identiques, en employant la valeur exacte de n déduite des deux distances zénitales δ, δ' (art. 216).

Si dans cette dernière formule on eût fait précéder K du signe positif, la valeur de H aurait été elle-même positive, et pour lors elle eût exprimé que le point A est plus élevé que le point de station B.

Dans le calcul d'un réseau trigonométrique, on a toujours soin de faire de fréquentes vérifications de tous les résultats qu'on obtient : par exemple, la différence de niveau des sommets des signaux érigés

aux points A, B du triangle ABC (fig. 34), après avoir été déterminée directement par la distance AB, se vérifiera en passant par le point C, c'est-à-dire au moyen des deux différences de niveau des points A, C et des points C, B.

Quand on emploie à cet effet des distances zénitales moyennes et réciproques, résultantes d'observations faites dans les momens les plus convenables et avec un bon instrument, les limites des discordances sont tellement resserrées, que l'on peut répondre des différences de niveau à 2 mètres près dans les triangulations primaires, ainsi que le prouvent tous les régistres géodésiques du Dépôt de la Guerre : alors, la recherche du coefficient de la réfraction terrestre perd un peu de son importance. Ce coefficient, assujéti à toutes les vicissitudes atmosphériques, varie tellement à certaines époques, pendant la présence du Soleil, et surtout dans les lieux bas et humides, que quand on parviendrait, à l'aide de plusieurs milliers d'observations, à en déterminer la valeur moyenne d'heure en heure dans chaque saison, la probabilité de l'exactitude d'une différence de niveau calculée par une seule distance zénitale prise isolément, serait encore extrêmement faible ; puisque la réfraction vraie peut différer sensiblement de la réfraction moyenne. Il n'y a donc pas de doute que les distances zénitales réciproques ne soient de beaucoup préférables dans les nivellemens géodésiques importans.

225. Nous venons d'obtenir la différence de niveau de deux points d'où l'on a pu observer simultanément les distances réciproques au zénit : cherchons maintenant celle de deux objets inaccessibles, mais dont on a les distances rectilignes aux centres des stations.

Du point A (fig. 48) on a observé les distances zénitales des points D, C; l'une de $100^g,367$, et l'autre de $100^g,8891$. On demande la différence de niveau de ces deux points; sachant d'ailleurs que leurs distances à la station A sont respectivement de $28108^m,21$ et de $6448^m,51$, et que le coefficient de la réfraction était ce jour-là de 0,08, à fort peu près. On a

$$K = 28108^m,21, \qquad K_1 = 6448^m,51,$$
$$\delta = 100^g,367, \qquad \delta_1 = 100^g,8891,$$
$$dN = K \cot(\delta + r - \tfrac{1}{2} C), \qquad dN_1 = K_1 \cot(\delta_1 + r_1 - \tfrac{1}{2} C_1);$$

ainsi la différence cherchée sera $dN - dN_1$;

Calcul de la hauteur d'un lieu d'où l'on voit l'horizon de la mer.

227. Du sommet B d'une montagne (fig. 47) on a observé l'angle de $100^g,3545$, entre l'horizon de la mer et le zénit; on demande la hauteur du centre de l'instrument au-dessus du niveau de la mer, ou sa *hauteur absolue*. On a, d'après l'art. 222,

$$N = \tfrac{1}{2}\rho\,(1+n)^2 \operatorname{tang}^2(\delta - 100),$$

$$\begin{array}{rl} \delta = 100^g,3545 & \log 0,5 = 9,69897 \\ -\ 100 & \log \rho = 6,80453 \\ \text{dépression appar.} = \ \ 0,3545 & \log (1,08)^2 = 0,06685 \\ & \text{l.tang}^2(\delta - 100) = 5,49148 \\ & \log N = 2,06183 = 115^m,3. \end{array}$$

Donc le centre du cercle était élevé au-dessus de l'horizon de la mer, de $115^m,3$.

Pour que les hauteurs déterminées de cette manière s'accordassent avec celles obtenues par des mesures directes, il faudrait connaître la valeur exacte de n; mais comme on est alors obligé d'employer une valeur purement hypothétique, il ne serait pas impossible qu'il y eût une incertitude de 10 à 12 mètres sur une grande hauteur calculée d'après une observation de l'horizon de la mer prise isolément (*Base du Système métrique*, tom. II, pag. 759).

228. Supposons maintenant qu'on ait déterminé, par les méthodes des articles précédens, la différence de niveau entre le sommet B de la montagne dont il s'agit, et un point quelconque P; ensuite la différence de niveau des points P, P'; puis des points P', P'', et ainsi de suite; de manière, par exemple, que la différence de niveau

entre B et P .... $= +22^m,6$
entre P et P' ..... $= -68^m,4$
entre P' et P'' ..... $= -27,1$
entre P'' et P''' .... $= +40^m,8$
entre P''' et P''''.... $= +12,0$
on aura (art. 223) $+H = +75,4$; $-D = -95,5$;

par conséquent la hauteur du point P'''' au-dessus du niveau de la

mer sera, suivant la remarque de l'article cité,

$$N + H - D = 115^{m},3 + 75^{m},4 - 95^{m},5 = 95^{m},2.$$

C'est ainsi que M. Delambre a fait le nivellement d'une centaine de points de la méridienne de France, depuis l'Océan jusqu'à la Méditerranée. Il est très remarquable que cette opération, qui n'était que secondaire, et dans laquelle on s'est abstenu d'employer tous les moyens qui pouvaient la rendre plus précise, a cependant prouvé que les niveaux des deux mers n'ont aucune inégalité sensible. Les hauteurs absolues de tous ces points sont comptées à partir de la laisse de basse mer; il faudrait les diminuer de $0^{t},97$ pour les rapporter au niveau de la mer moyenne (art. 144).

Si, en faisant la triangulation d'un pays, l'on ne pouvait se procurer, par des mesures géométriques, la hauteur absolue d'aucune station, il faudrait alors recourir à l'usage du baromètre. Nous parlerons des mesures barométriques, dans la seconde partie de cet Ouvrage.

Les hauteurs des objets au-dessus d'un plan de comparaison sont principalement utiles pour former le relief d'une carte topographique. Les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, et ces hauteurs s'enregistrent dans un même tableau, afin de reconnaître sur-le-champ les trois coordonnées de chaque lieu.

2e HYPOTHÈSE.

La Terre étant un ellipsoïde de révolution.

229. On pourrait craindre que les conséquences déduites de la théorie précédente, dans laquelle nous avons fait abstraction de l'aplatissement de la Terre, ne fussent pas assez exactes dans la pratique. Pour dissiper tous les doutes à cet égard, nous allons envisager la question sous son véritable point de vue.

En considérant la Terre comme un ellipsoïde de révolution, la différence de niveau de deux points, l'un étant sur sa surface, est mesurée par la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'autre point sur cette surface. Par les opérations géodésiques, on obtient leur plus courte distance au niveau des mers, ainsi que leurs positions géographiques : alors la corde de cette plus courte distance et la hauteur cherchée sont les deux côtés d'un triangle rectiligne donné de position, et dans lequel on peut connaître en outre, par

l'observation, l'angle que le troisième côté fait avec la hauteur ou la verticale dont il s'agit. Relativement à la sphère, ce triangle serait invariable, toutes choses égales d'ailleurs, quelque part qu'il fût situé et quelque direction qu'il eût; mais il n'en est pas de même à l'égard du sphéroïde.

230. Il résulte de la théorie exposée à l'art. 167, que si M et M' (fig. 40) sont les extrémités d'une ligne géodésique K ayant pour latitudes H, H', et que ρ, ρ' soient les longueurs des normales MN, $M'N'$ comprises entre ces points et ceux où elles rencontrent l'axe de rotation, l'on a

$$\rho = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \quad \rho' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 H')^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous avons vu en outre à l'art. 189, que la différence de ces deux normales est du second ordre. Cherchons, par un procédé analogue, la différence de la normale ρ du point M à l'oblique $M'N = \rho_1$ du point M', parce qu'elle nous sera utile.

D'abord, en vertu du triangle $NM'N'$, et de ce que l'angle $NM'N' = \psi$, on a

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\rho' \cos H'}{\cos (H' + \psi)} = \frac{\rho'}{\cos \psi (1 - \operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} H')} \\ &= \rho' \operatorname{séc} \psi \, (1 + \operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} H' + \ldots); \end{aligned}$$

ou à cause de la petitesse de ψ,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho' \, (1 + \operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} H') \\ &= a \, [(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 H' + \tfrac{3}{8} e^4 \sin^4 H' \ldots)] \, (1 + \operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} H'), \end{aligned}$$

ou encore

$$\rho_1 = a \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 H' + \tfrac{3}{8} e^4 \sin^4 H' + \operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} H' \\ \quad + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 H' \operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} H' \end{array} \right\}.$$

D'un autre côté, le théorème de Maclaurin donne

$$\rho = f(\Delta H) = \rho' + \left(\frac{d\rho}{dH}\right) \Delta H + \left(\frac{d^2\rho}{dH^2}\right) \frac{\Delta H^2}{2} + \ldots;$$

et puisque

$$\rho = a \, [1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 H + \tfrac{3}{8} e^4 \sin^4 H + \ldots],$$

on a

$$\left(\frac{dH}{d\varrho}\right) = a\,[e^2 \sin H' \cos H' + \tfrac{3}{2}\, e^4 \sin^3 H' \cos H'],$$

$$\left(\frac{dH^2}{d^2\varrho}\right) = a\,[e^2 \cos^2 H' - e^2 \sin^2 H'];$$

par suite,

$$\begin{aligned}\rho = a\,[1 &+ \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 H' + \tfrac{3}{8} e^4 \sin^4 H' \ldots] \\ &+ a\, e^2 \sin H' \cos H' . \Delta H + a\,\frac{e^2}{2} \cos^2 H' . \Delta H^2 \\ &+ \tfrac{3}{2} a e^4 \sin^3 H' \cos H' . \Delta H - a\,\frac{e^2}{2} \sin^2 H' . \Delta H^2;\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\rho - \rho_1 = a \left\{ \begin{aligned} & e^2 \sin H' \cos H' . \Delta H + \frac{e^2}{2} \cos^2 H' . \Delta H^2 \\ & \quad - \frac{e^2}{2} \sin^2 H' . \Delta H^2 - \operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} H' \\ & \quad + \tfrac{3}{2} e^4 \sin^3 H' \cos H' . \Delta H \\ & \quad - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 H' \operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} H' \end{aligned} \right\};$$

d'ailleurs, par l'art. 195, et à cause de $\operatorname{tang} \psi = \frac{NN' \cos H'}{\varrho'}$ à très peu près, on a en fonction de H',

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \psi \operatorname{tang} H' = e^2 \sin H' \cos H' . \Delta H &- \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 H' . \Delta H^2 \\ &+ e^4 \sin^3 H' \cos H' . \Delta H;\end{aligned}$$

ainsi, définitivement

$$\begin{aligned}\rho - \rho_1 &= a \left\{ \begin{aligned} & \tfrac{1}{2} e^2 \cos^2 H' . \Delta H^2 + \tfrac{3}{2} e^4 \sin^3 H' \cos H' . \Delta H \\ & - e^4 \sin^3 H' \cos H' . \Delta H - \tfrac{1}{2} e^4 \sin^3 H' \cos H' . \Delta H \end{aligned} \right\} \\ &= \tfrac{1}{2} a e^2 \cos^2 H' . \Delta H^2 = \mu;\end{aligned}$$

expression exacte aux quantités près du quatrième ordre, et qui, en mettant pour $\Delta H = H - H'$ sa valeur approchée (art. 192), devient

$$\rho - \rho_1 = \mu = \tfrac{1}{2} a e^2 \frac{K^2}{\varrho^2} \cos^2 H' . \cos^2 Z = \tfrac{1}{2} e^2 \frac{K^2}{\varrho} \cos^2 H' \cos^2 Z.$$

Si l'on avait $K = 60000^m$, il s'ensuivrait que $\mu = 0^m,3 \cos^2 H' \cos^2 Z$; il est donc tout-à-fait inutile de tenir compte des termes négligés.

231. Problème I. *Déterminer la réfraction terrestre par deux distances zénitales réciproques.*

Au point M (fig. 49), on a pris la distance zénitale δ du point M', et à celui-ci on a observé au même moment la distance zénitale δ' du point M; on demande le coefficient de la réfraction.

Nous supposerons toujours que la trajectoire MM', décrite par

un rayon lumineux, a très peu d'étendue, et qu'elle se confond sensiblement avec son cercle osculateur; ainsi, les réfractions aux points M, M' sont égales (art. 214). Si donc un de ces angles est désigné par r, les distances zénitales vraies seront $\delta + r$, $\delta' + r$. Ces deux distances zénitales n'étant pas en général situées dans un même plan, rien ne les lie entre elles; mais soit $\delta_1 + r$ l'angle $MM'V_1$ formé par la corde MM' et l'oblique $NM'V_1$; alors dans le triangle rectiligne $NM'M$ on aura évidemment, en faisant $MNM' = C$,

$$\delta + r + \delta_1 + r = 200^g + C,$$

d'où

$$r = 100^g + \frac{C}{2} - \left(\frac{\delta + \delta_1}{2}\right); \text{ de là } \delta + r = 100 + \frac{C}{2} + \left(\frac{\delta - \delta_1}{2}\right).$$

Reste à trouver la relation qui existe entre $\delta_1 + r$ et $\delta' + r$; car δ_1 n'ayant pu être observée, il faut éliminer cette distance zénitale auxiliaire de la valeur précédente de r.

Pour cet effet, l'on remarquera que dans le triangle sphérique mnn' (fig. 50), on a (z' étant l'azimut de M sur l'horizon de M', compté du nord vers l'est),

$$\cos(\delta_1 + r) = \cos\psi \cos(\delta' + r) + \sin\psi \sin(\delta' + r) \cos z',$$

ou en supposant $\cos\psi = 1$,

$$\begin{aligned}\cos(\delta_1 + r) - \cos(\delta' + r) &= \sin\psi \sin(\delta' + r) \cos z' \\ &= 2 \sin\left(\frac{\delta_1 + \delta'}{2} + r\right) \sin\left(\frac{\delta' - \delta_1}{2}\right);\end{aligned}$$

or, δ_1 et δ' devant différer très peu l'une de l'autre, on a, par une première approximation,

$$\sin\psi \sin(\delta' + r) \cos z' = \sin(\delta' + r) \sin(\delta' - \delta_1),$$

et même

$$\delta' - \delta_1 = \psi \cos z', \text{ ou } \delta_1 = \delta' - \psi \cos z'.$$

Substituant cette valeur dans l'avant-dernière équation ci-dessus, on aura plus exactement

$$\sin\psi \sin(\delta' + r) \cos z' = 2 \sin\left(\delta' + r - \frac{\psi}{2} \cos z'\right) \sin\left(\frac{\delta' - \delta_1}{2}\right),$$

et par suite

$$\delta' - \delta_1 = \frac{\psi \cos z' \sin(\delta' + r)}{\sin(\delta' + r)\left[1 - \frac{\psi}{2}\cos z' \cot(\delta' + r)\right]}$$

$$= \psi \cos z' \left[1 + \frac{\psi}{2}\cos z' \cot(\delta' + r)\right]$$

$$= \psi \cos z' + \tfrac{1}{2}\psi^2 \cos^2 z' \cot(\delta' + r);$$

mais comme nous sommes convenus de négliger les quantités du quatrième ordre, nous aurons seulement

$$\delta' - \delta_1 = \psi \cos z' = \theta;$$

partant,

$$r = 100^g + \frac{C}{2} - \left(\frac{\delta + \delta' - \theta}{2}\right) \qquad (7):$$

d'ailleurs, on a, par la théorie développée à l'art. 192,

$$z' = Z - S \sin Z \operatorname{tang} H;$$

de là, $$\cos z' = \cos Z + S \sin^2 Z \operatorname{tang} H,$$

et $$\theta = \psi \cos z' = e^2 \cos^2 H' \cos^2 Z . \frac{K}{\varrho \sin 1''}$$

$$+ e^2 \cos^2 H' \cos Z \sin^2 Z \operatorname{tang} H . \frac{K^2}{\varrho^2 \sin 1''}$$

$$= e^2 \cos^2 H' \cos^2 Z . \frac{K}{\varrho \sin 1''}$$

$$+ \frac{e^2}{4} \sin 2H' \sin 2Z \sin Z . \frac{K^2}{\varrho^2 \sin 1''};$$

le second terme, qui est du troisième ordre, est tout-à-fait insensible.

Quoique nous ignorions la nature de la trajectoire MM', cette courbe peut toujours, dans la pratique de la Géodésie, être, comme nous l'avons déjà dit, remplacée par son cercle osculateur; et alors il est évident que, dans les mêmes circonstances météorologiques, la réfraction terrestre est proportionnelle à l'angle C: on a donc, comme à l'art. 214,

$$r = nC \qquad (7').$$

Tenir compte du terme θ dans la formule précédente, c'est supposer que les observations de distances zénitales sont très exactes, que la réfraction n'a pas varié pendant ces observations, et que la Terre est effectivement un ellipsoïde de révolution; mais il n'existe sur tout cela rien de bien certain.

232. L'angle C est nécessairement déterminé, si l'on connaît sur le globe la position des deux stations M, M' (fig. 49). Or, par la résolution des triangles d'un réseau, l'on obtient l'arc de distance bm'', ou la corde $bm'' = K$ du sphéroïde, comprise entre les verticales VN, $V'N'$; et il est évident que cette corde diffère, dans tous les cas, extrêmement peu de la droite bm' correspondante, puisque dans le triangle rectiligne $bm'm''$, le côté $m'm''$ opposé à l'angle ψ de $5''$ sexagésimales au plus, est extrêmement petit, et même absolument insensible, à cause du peu d'élévation du point M' au-dessus de m'' ou du niveau des mers. En effet, en supposant $m''M'$ de 2000^m, $m'm''$ ne vaudrait que $0^m,048$; ainsi nous considérerons à l'avenir bm'' comme égal à bm'.

On a remarqué d'ailleurs, que $\rho - \rho_1 = \mu$ est une quantité du troisième ordre; d'où l'on peut inférer que si $m'''N = mN$ (fig. 51), on a aussi à très peu près mm''' ou $K_1 = K$: c'est au surplus ce que prouve le calcul suivant.

On a d'une part

$$K^2_1 = 2\rho - 2\rho^2 \cos C = 4\rho^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C,$$

d'où

$$K_1 = 2\rho \sin \tfrac{1}{2} C;$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} K^2 &= \rho^2 + (\rho - \mu)^2 - 2\rho(\rho - \mu) \cos C \\ &= \mu^2 + 4\rho^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C - 4\rho\mu \sin^2 \tfrac{1}{2} C \\ &= 4\rho^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C \left[1 + \frac{\mu^2 - 4\rho\mu \sin^2 \frac{1}{2} C}{4\rho^2 \sin^2 \frac{1}{2} C}\right]; \end{aligned}$$

et de là

$$K = 2\rho \sin \tfrac{1}{2} C + \frac{\mu^2}{4\rho \sin \frac{1}{2} C} - \mu \sin \tfrac{1}{2} C.$$

Cette dernière expression de K, dans laquelle $\sin \frac{1}{2} C$ est une quantité du premier ordre, peut se réduire à son premier terme, c'est-à-dire à $K = 2\rho \sin \frac{1}{2} C$, puisque la fraction $\frac{\mu^2}{4\rho \sin \frac{1}{2} C}$ qui renferme la normale ρ au dénominateur, est de beaucoup inférieure au terme du quatrième ordre $\mu \sin \frac{1}{2} C$. L'angle C sera donc assez exactement connu par l'équation $\sin \frac{1}{2} C = \frac{K}{2\rho}$, ou $\sin \frac{1}{2} C = \frac{K}{2\rho'}$, puisque ρ et ρ' ne diffèrent entre elles que d'une quantité du second ordre.

233. PROBLÈME II. *Déterminer la différence de niveau de deux points, par le moyen de deux distances zénitales réciproques.*

Admettons la même notation que précédemment; supposons de plus, que bm' (fig. 49) soit la corde du sphéroïde qui mesure la distance rectiligne des deux stations M, M'; menons mm' parallèle à MM', et désignons par dN la différence de niveau bm des deux points m, m'. Cela posé, on tirera du triangle mNm' la proportion suivante:

$$\sin(\delta + r) : \rho_1 :: \sin(\delta_1 + r) : \rho + dN,$$

d'où
$$dN = \frac{\rho_1 \sin(\delta_1 + r) - \rho \sin(\delta + r)}{\sin(\delta + r)};$$

mais $\rho = \rho_1 + \mu$, et $\delta + r = 100^g + \frac{C}{2} + \frac{\delta - \delta_1}{2}$; par conséquent

$$dN = \frac{\rho_1 [\sin(\delta_1 + r) - \sin(\delta + r)]}{\sin(\delta + r)} - \mu$$
$$= \frac{2\rho_1 \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta}{2} + r\right) \sin\left(\frac{\delta_1 - \delta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\delta - \delta_1}{2} + \frac{C}{2}\right)} - \mu.$$

De plus à cause de $\delta_1 + r + \delta + r = 200^g + C$, on a

$$\frac{\delta_1 + \delta}{2} + r = 100^g + \frac{C}{2};$$

par suite,

$$dN = \frac{2\rho_1 \sin\frac{1}{2} C \sin\left(\frac{\delta - \delta_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\delta - \delta_1}{2}\right) \cos\frac{C}{2}\left[1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2} C \operatorname{tang}\left(\frac{\delta - \delta_1}{2}\right)\right]} - \mu$$
$$= K \operatorname{séc}\tfrac{1}{2} C \operatorname{tang}\left(\frac{\delta - \delta_1}{2}\right) + K \operatorname{séc}\tfrac{1}{2} C \operatorname{tang}\tfrac{1}{2} C \operatorname{tang}^2\left(\frac{\delta - \delta_1}{2}\right) - \mu;$$

d'ailleurs $\delta_1 = \delta' - \psi \cos z'$, par conséquent

$$dN = K \operatorname{séc}\tfrac{1}{2} C \operatorname{tang}\left(\frac{\delta - \delta'}{2} + \frac{\psi}{2} \cos z'\right) + K \operatorname{séc}\tfrac{1}{2} C \operatorname{tang}\tfrac{1}{2} C \operatorname{tang}^2 \left(\frac{\delta - \delta'}{2} + \frac{\psi}{2} \cos z'\right) - \mu$$
$$= K \operatorname{séc}\tfrac{1}{2} C \left[\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\delta - \delta'}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{tang}\psi \cos z'}{1 - \frac{1}{2} \operatorname{tang}\psi \cos z' \operatorname{tang}\left(\frac{\delta - \delta'}{2}\right)}\right]$$
$$+ K \operatorname{séc}\tfrac{1}{2} C \operatorname{tang}\tfrac{1}{2} C \operatorname{tang}^2\left(\frac{\delta - \delta'}{2}\right) - \mu.$$

$$= K \text{ séc } \tfrac{1}{2} C\left[\text{tang}\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)+\tfrac{1}{2}\text{tang}\,\psi\cos z'\,\text{séc}^2\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)\right]+\text{etc.}$$

$$= K \text{ séc } \tfrac{1}{2} C\,\text{tang}\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)+K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}^2\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)$$
$$+\frac{K}{2}\text{tang}\,\psi\cos z'-\mu;$$

car $\text{séc}^2\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)$ et $\text{séc}\,\frac{1}{2}C$ diffèrent l'une et l'autre très peu de l'unité.

Cette valeur de dN, dans laquelle δ est supposée plus grande que δ', doit être prise positivement, lorsqu'on nivelle de M' en M, et négativement lorsqu'on nivelle de M en M', c'est-à-dire quand on va du nord vers le sud; dans ce second cas,

$$dN = K \text{ séc } \tfrac{1}{2} C\,\text{tang}\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)-K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}^2\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)$$
$$-\frac{K}{2}\text{tang}\,\psi\cos z'+\mu.$$

Les deux derniers termes de cette valeur de dN se détruisent mutuellement; en effet, à cause de

$$\text{tang}\,\psi = e^2\cos^2 H'.\Delta H = e^2\cos^2 H'.\frac{K}{\varrho}\cos Z,$$

on a

$$\frac{K}{2}\text{tang}\,\psi\cos z' = \tfrac{1}{2}e^2\cos^2 H'.\frac{K^2}{\varrho}\cos^2 Z;$$

d'ailleurs

$$(8)\quad \mu = \tfrac{1}{2}ae^2\frac{K^2}{\varrho^2}\cos^2 H'\cos^2 Z = \tfrac{1}{2}e^2\cos^2 H'.\frac{K^2}{\varrho}\cos^2 Z;$$

ainsi on a seulement

$$(9)\quad dN = K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)-K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}^2\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right).$$

Dans la pratique, on aura égard au signe de la tangente, ce qui rendra les deux termes négatifs.

Il suit de là, que la différence de niveau sur le sphéroïde, déterminée à l'aide de deux distances zénitales réciproques, s'obtient comme sur une sphère dont le rayon serait égal à la normale ϱ. Cependant la vraie différence de niveau cherchée est BM au lieu de bm; mais il n'est pas difficile de voir que puisque ces deux hauteurs sont proportionnelles aux lignes NB, Nb, la différence $BM-bm$ est tout-à-fait insensible dans la pratique et bien au-dessous des erreurs qui affectent les observations.

Il est à remarquer que la valeur ci-dessus de dN ne doit être en erreur que de la moitié de la différence qui pourrait exister entre les réfractions aux points M et M'.

234. Problème III. *Calculer la différence de niveau de deux points, à l'aide d'une seule distance zénitale.*

Supposons d'abord, que le lieu M (fig. 49) le plus boréal soit celui d'où l'on a observé la distance zénitale δ du point M'; on demande la différence de niveau BM ou bm', toutes choses d'ailleurs étant comme dans le problème précédent.

Le triangle mNm' donne

$$dN = \frac{\varrho_1 \sin(\delta + r - C) - \varrho \sin(\delta + r)}{\sin(\delta + r)};$$

ou bien, à cause de $\rho = \rho_1 + \mu$,

$$\begin{aligned} dN &= \frac{\varrho_1 [\sin(\delta + r - C) - \sin(\delta + r)]}{\sin(\delta + r)} - \mu \\ &= \frac{-2\varrho_1 \cos\left(\delta + r - \frac{C}{2}\right) \sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\delta + r - \frac{C}{2} + \frac{C}{2}\right)} - \mu \\ &= \frac{-K \cot\left(\delta + r - \frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{1}{2}C\left[1 + \tang\frac{1}{2}C \cot\left(\delta + r - \frac{C}{2}\right)\right]} - \mu \\ &= -K \sec\tfrac{1}{2}C \cot\left(\delta + r - \frac{C}{2}\right) \\ &\quad + K \sec\tfrac{1}{2}C \tang\tfrac{1}{2}C \cot^2\left(\delta + r - \frac{C}{2}\right) - \mu; \end{aligned}$$

ou changeant le signe de cette valeur, puisqu'on nivelle du nord vers le sud, et que δ est obtus dans la figure,

$$(10) \quad \begin{aligned} dN &= K \sec\tfrac{1}{2}C \cot\left(\delta + r - \frac{C}{2}\right) \\ &\quad - K \sec\tfrac{1}{2}C \tang\tfrac{1}{2}C \cot^2\left(\delta + r - \frac{C}{2}\right) + \mu. \end{aligned}$$

On aura, dans l'un comme dans l'autre cas, égard au signe de la cotangente.

Le terme μ n'est pas détruit comme dans la question précédente; mais il n'y aurait aucun inconvénient à le négliger, car il est du troisième ordre, et le plus souvent en deçà des limites des erreurs d'observation : d'ailleurs l'erreur de l'hypothèse à faire dans ce cas

sur le coefficient de la réfraction, l'emportera souvent sur la valeur de ce terme.

On déduit, comme conséquence de cette formule, celle (9) dépendante de deux distances zénitales, et cela en remarquant que

$$\delta + r - \frac{C}{2} = 1^{\circ} + \left(\frac{\delta - \delta_1}{2}\right), \quad \delta_1 = \delta' - \psi \cos z',$$
$$\tfrac{1}{2} K \operatorname{tang} \psi \cos z' - \mu = 0.$$

Supposons en second lieu, que l'on connaisse seulement la distance zénitale δ' observée du point M'; il est aisé de voir que l'on aura, en nivelant du nord au sud,

$$(11) \quad dN = -K \operatorname{séc} \tfrac{1}{2} C \cot\left(\delta' + r - \frac{C}{2}\right)$$
$$- K \operatorname{séc} \tfrac{1}{2} C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C \cot^2 \left(\delta' + r - \frac{C}{2}\right) - \mu.$$

Concluons de là, que la formule pour déterminer, sur le sphéroïde, la différence de niveau de deux points par une seule distance zénitale, est dépendante de l'aplatissement, soit qu'on nivelle du nord vers le sud, soit qu'on nivelle en sens opposé. M. Delambre a déduit de ses calculs une conséquence toute contraire, pag. 746 et 749 du tom. II de la *Base du Système métrique décimal;* mais il est aisé de voir que c'est par une légère inadvertance. On remarquera en outre que le signe du terme μ qui contient l'aplatissement, dépend de l'espèce de l'angle observé. A cet égard, on peut établir pour règle générale, 1°. que si la distance zénitale observée est $> 100^g$, le terme μ est de signe contraire à celui du premier terme de la valeur de dN; 2°. que si cette distance zénitale est $< 100^g$, ces deux termes ont le même signe.

235. Des deux formules (10) et (11), dans lesquelles on négligerait la réfraction r, la première relative à $\delta > 100^g$ donnerait évidemment une hauteur dN trop faible de toute la quantité due à cette réfraction, dans l'hypothèse que la densité de l'air décroît à mesure qu'on s'élève; et la deuxième, relative à $\delta' < 100^g$, donnerait une hauteur dH trop grande de la même quantité; ainsi la demi-différence de ces deux valeurs est précisément la correction à faire à l'une des hauteurs calculées. Or, soit Δh cette correction; comme elle sera donnée en mètres, on l'obtiendra en secondes par la formule suivante :

$$(12) \qquad r = \frac{\Delta h}{K \sin 1''};$$

K étant la distance des deux points M, M'. C'est là une des méthodes que Méchain employait pour déterminer la réfraction terrestre.

236. Problème IV. *Déterminer la hauteur d'un lieu d'où l'on voit l'horizon de la mer.*

Examinons, comme dans le problème précédent, les deux cas qui peuvent se présenter. Pour cela, supposons que la station M soit boréale par rapport au point de l'horizon observé M' (fig. 52), point dont la distance zénitale apparente est δ; alors la hauteur cherchée N sera représentée par AM, et le triangle rectiligne MNM' donnera, à cause que l'angle $MM'V_1 = 100^g - \psi \cos z' = 100^g - \theta$,

$$\begin{aligned} N &= \frac{\rho_1 [\cos\theta - \cos(\theta + C)]}{\cos(\theta + C)} - \mu \\ &= \frac{\rho_1 [\cos\theta (1 - \cos C) + \sin\theta \sin C]}{\cos\theta \cos C [1 - \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang} C]} - \mu \\ &= \rho_1 \left[\frac{1 - \cos C}{\cos C} (1 + \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang} C) + \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang} C\right] - \mu, \end{aligned}$$

ou simplement, à cause de la petitesse des angles C et θ,

$$\begin{aligned} N &= \rho_1 \left[\frac{1 - \cos C}{\cos C} + \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang} C\right] - \mu \\ &= \rho_1 \left[\frac{2\sin^2 \frac{1}{2} C}{\cos^2 \frac{1}{2} C - \sin^2 \frac{1}{2} C} + \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang} C\right] - \mu \\ &= \frac{2\rho_1 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} C}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} C} + \rho_1 \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang} C - \mu \\ &= \tfrac{1}{2} \rho_1 \operatorname{tang}^2 C + \rho_1 \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang} C - \mu; \end{aligned}$$

mais dans le triangle dont il s'agit, $\delta + r = 100^g + \theta + C$, ou

$$\delta + nC = 100^g + \theta + C, \text{ d'où } C = \frac{\delta - 100 - \theta}{1 - n};$$

ainsi

$$\begin{aligned} N &= \tfrac{1}{2} \rho_1 \operatorname{tang}^2 \left(\frac{\delta - 100 - \theta}{1 - n}\right) + \rho_1 \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\left(\frac{\delta - 100}{1 - n}\right) - \mu \\ &= \tfrac{1}{2} \rho_1 \operatorname{tang}^2 \left(\frac{\delta - 100}{1 - n}\right) - \rho_1 \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang} \frac{(\delta - 100)}{(1 - n)^2} \\ &\qquad + \rho_1 \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\left(\frac{\delta - 100}{1 - n}\right) - \mu. \end{aligned}$$

La valeur moyenne du coefficient n de la réfraction étant seulement de 0,08 environ, il s'ensuit que le deuxième et le troisième terme

de cette valeur se détruisent sensiblement; ainsi on a seulement

$$(13) \qquad N = \tfrac{1}{2}\rho_1 \operatorname{tang}^2 \frac{(\delta - 100^g)}{(1-n)} - \mu;$$

et si l'on mettait ρ au lieu de ρ_1, l'on ne négligerait encore que des quantités absolument insensibles dans la pratique.

Le cas où le lieu de l'observation est au sud, c'est-à-dire en M' (fig. 53), se traite de la même manière. Soit alors δ' la distance zénitale observée; l'angle auxiliaire $MM'V_1$ sera $\delta_1 + r$, et la hauteur cherchée N sera $A'M'$ ou $A''M'$. De plus le triangle $MM'N$ donnera

$$\begin{aligned} N &= \frac{\rho - \rho_1 \cos C}{\cos C} = \frac{\rho(1-\cos C)}{\cos C} + \mu \\ &= \frac{2\rho \sin^2 \frac{1}{2} C}{\cos^2 \frac{1}{2} C(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} C)} + \mu = 2\rho \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} C + \mu \\ &= \frac{\rho}{2} \operatorname{tang}^2 C + \mu; \end{aligned}$$

et comme $\delta_1 + r = 100^g + C$, ou $\delta_1 + nC = 100 + C$, d'où

$$C = \frac{\delta_1 - 100}{1-n} = \frac{\delta' - 100 - \theta}{1-n},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} N = \frac{\rho}{2} \frac{\operatorname{tang}^2(\delta' - 100 - \theta)}{(1-n)^2} + \mu &= \tfrac{1}{2}\rho \frac{\operatorname{tang}^2(\delta' - 100)}{(1-n)^2} \\ &\quad - \rho \operatorname{tang}\theta \frac{\operatorname{tang}(\delta' - 100)}{(1-n)^2} + \mu, \end{aligned}$$

ou seulement

$$N = \frac{\rho}{2} \frac{\operatorname{tang}^2(\delta' - 100)}{(1-n)^2} - \rho \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}(\delta' - 100) + \mu.$$

Mais la petitesse de l'angle C permet de faire

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}(\delta' - 100) &= \rho \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang} C = 2\rho \sin \tfrac{1}{2} C \operatorname{tang}\theta \\ &= K \operatorname{tang}\psi \cos z' = 2\mu; \end{aligned}$$

ainsi définitivement

$$(13') \qquad N = \frac{\rho}{2} \frac{\operatorname{tang}^2(\delta' - 100)}{(1-n)^2} - \mu;$$

formule qui est la même que la précédente; parce que la différence de ρ à ρ_1 peut, comme nous l'avons déjà dit, être considérée comme nulle.

A la rigueur, les distances zénitales apparentes δ, δ', prises au même moment au point M, l'une vers le sud, l'autre vers le nord, ne doivent pas, en général, être les mêmes sur le sphéroïde; mais leur différence est si petite qu'elle échappe nécessairement aux observations; ainsi les termes du quatrième ordre, rejetés des formules (13) et (13'), et de toutes celles qui précèdent, sont très inutiles.

237. Il résulte de cette analyse, 1°. que les formules pour calculer les différences de niveau sur le sphéroïde de révolution, sont les mêmes dans tous les sens du nivellement; 2°. que ces formules ne renferment plus les termes dépendans de l'aplatissement de la Terre, si on y introduit deux distances zénitales réciproques; ou bien si, en ne faisant usage que d'une seule distance, on opère dans le sens des parallèles; 3°. enfin, que la correction d'aplatissement, lorsqu'elle paraît nécessaire, étant presque toujours au-dessous des erreurs des observations, le nivellement trigonométrique peut, dans tous les cas, être considéré comme ayant lieu sur une sphère dont le rayon est égal à la normale comprise entre le point d'où l'on observe et l'axe de rotation de la Terre.

Il paraîtrait cependant convenable d'introduire dans les formules précédentes, au lieu de la normale dont il s'agit, le rayon de courbure de la ligne géodésique K obtenu à l'art. 187. Si l'on prenait ce parti, on aurait

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \frac{K(\rho' \cos^2 Z + \rho \sin^2 Z)}{2\rho\rho'};$$

ρ, ρ' et Z ayant ici les mêmes significations qu'aux art. 187 et 192: mais après tout, ce serait compliquer le calcul sans avoir l'espérance de parvenir à de meilleurs résultats; puisqu'il existera toujours, quoi qu'on fasse, une petite incertitude sur les distances zénitales employées comme élémens des différences de niveau.

Nous ferons remarquer, en terminant cette matière, que la série (5) trouvée à l'art. 218, et qui donne la différence de niveau par deux distances zénitales, se compose de termes dont les valeurs numériques sont toutes positives ou négatives, selon que le second point est plus élevé ou plus bas que le premier (art. 233); il en est de même de la série (6), art. 220 : ainsi en assujétissant à cette règle le second calcul de dN donné à l'art. 224, on a exactement

$$dN = -71^m,4488 - 0^m,0004 = -71^m,4492,$$

comme par la première solution.

TABLEAU

De plusieurs quantités numériques employées en Géodésie.

Rayon réduit en secondes { sexagésimales..... log. R^s = 5,31442 513317
centésimales..... log. R^n = 5,80388 012297

log. demi-circonfér. d'un cercle dont le rayon = 1,... ou log. π = 0,49714 987269

Logarithme du nombre M par lequel il faut multiplier les logarithmes hyperboliques ou népériens, pour les convertir en logarithmes ordinaires, ou..... log. M = 9,63778 431130

Logarithmes constans et additifs pour convertir		
	la toise en mètres.....	0,28981 99927
	le pied en mètre.....	9,51166 87423
	le pouce en mètre.....	8,43248 74963
	la ligne en mètre.....	7,35330 62503
	le degré vulgaire en grade.....	0,04575 74906
	la minute vulgaire en grade.....	8,26760 62402
	la seconde vulgaire en grade.....	6,48945 49898

Les complémens arithmétiques de ces sept derniers logarithmes serviraient à convertir les mètres en toises, ou en pieds, ou en pouces, ou en lignes; les degrés décimaux, en degrés, ou en minutes, ou en secondes vulgaires.

Rapport de la toise du Pérou au *fathom* ou toise anglaise = 1,06584335, suivant la *Base du Système métrique décimal.*

Logarithmes constans et additifs, pour convertir les pieds de Paris		
	en pieds de Londres.....	log. 0,0276553
	de Vienne.....	log. 0,0118410
	du Rhin.....	log. 0,0147747

Pour l'aplatissement de la Terre $\frac{1}{305}$, on a

log. du rayon de l'équateur en mètres, ou log. a = 6,80458 39646
log. du rayon du pôle en mètres, ou log. b = 6,80317 45662

log. rayon de la Terre à la latitude H, ou log. r = 6,8038861 + 0,00071 497 cos $2H$
− 0,00001 710 cos $4H$

log. rayon de courbure de l'arc perpendiculaire au méridien..... ou log N = 6,8052881 − 0,00070 47 cos $2H$
+ 0,00000 057 cos $4H$.

Rayon de la Terre supposée sphérique 6366198^m log. = 6,8038801.
Rayon moyen de la Terre..... log. = 6,8038793.
Degré moyen en France = 57020 toises = 11113^m,4.

L'air se dilate de $\frac{1}{275}$ de son volume par chaque degré du thermomètre centigrade, à partir de la température zéro et sous la pression atmosphérique de $0^m,76$.

Le mercure se dilate en volume de $\frac{1}{5550}$ par degré du même thermomètre, et à partir de la glace fondante.

Voici les dilatations linéaires de quelques autres substances :

NOMS DES SUBSTANCES.	DILATATION LINÉAIRE	
	Pour un degré du therm. centigrade.	Pour 1 degré du therm. en 80 parties.
Cuivre.....	0,00001 72244	0,0000 2153
	0,00001 71222	0,0000 2140
Cuivre jaune....	0,00001 86671	0,0000 2334
ou laiton.....	0,00001 88971	0,0000 2362
Fer doux forgé..	0,00001 22045	0,0000 1526
Fer rond passé à la filière.....	0,00001 23504	0,0000 1543
Tube de verre sans plomb...	0,00000 87572	0,0000 1095
Verre de France avec plomb...	0,00000 87199	0,0000 1090
Platine.....	0,00000 85655	0,0000 1070

Toutes ces dilatations sont en parties de l'unité, et sont comptées à partir de la température zéro.

Longueur du pendule simple réduit au vide, et battant à Paris les secondes de tems moyen $\begin{cases} \text{sexagésimales} = 0^m,993849 \\ \text{centésimales} = 0^m,741904 \end{cases}$

Dans la même hypothèse, et pour un lieu dont la latitude est H, la longueur du pendule simple, déduite d'un grand nombre d'observations, et correspondante à

la seconde sexagésimale.... $= 0^m,990787 + 0^m,0053982 \sin^2 H$,
la seconde décimale..... $= 0^m,739586 + 0^m,0040806 \sin^2 H$.

Intensité de la pesanteur dans le vide, $g = 9^m,8089$, correspondante à une seconde sexagésimale.

Vitesse du son, $337^m,27$ par seconde sexagésimale.

TABLES

GÉODÉSIQUES.

TABLE I.

ARGUMENT; *Angle à réduire.*

Cherchez l'angle observé dans la colonne à gauche et descendante, si cet angle est moindre que 100ᶜ, et dans la colonne à droite et ascendante, s'il surpasse 100ᶜ.

Pour un angle à réduire à l'horizon, le nombre *tangente* est positif, et le nombre *cotangente* est négatif; c'est le contraire pour un angle à réduire au plan des cordes.

Angle.	Tang.	D.	Cotang.	Diff.		Angle.	Tang.	D.	Cotang.	Diff.		Angle.	Tang.	D	Cotang.	Diff.	
				8"04				5		4"12				5		2"50	
10ᶜ 1	5"06	5	800"86	7,88	189ᶜ 9	14ᶜ 1	7"08	5	572"52	4,07	186ᶜ 9	18ᶜ 1	9"11	5	444"81	2,48	182 9
2	5,11	5	792,98	7,74	8	2	7,13	5	568,45	4,00	8	2	9,16	5	442,33	2,45	8
3	5,16	5	785,24	7,58	7	3	7,18	5	564,45	3,96	7	3	9,21	5	439,88	2,42	7
4	5,21	5	777,66	7,44	6	4	7,23	5	560,49	3,90	6	4	9,26	6	437,46	2,40	6
5	5,26		770,22		5	5	7,28		556,59		5	5	9,32		435,06		5
		5		7,30				5		3,84				5		2,37	
6	5,31	5	762,92	7,16	4	6	7,33	5	552,75	3,80	4	6	9,37	5	432,69	2,35	4
7	5,36	5	755,76	7,04	3	7	7,38	5	548,95	3,74	3	7	9,42	5	430,34	2,32	3
8	5,41	5	748,72	6,90	2	8	7,43	5	545,21	3,69	2	8	9,47	5	428,02	2,30	2
9	5,46	5	741,82	6,77	1	9	7,48	5	541,52	3,64	1	9	9,52	5	425,72	2,26	1
11ᶜ 0	5,51		735,05		189 0	15 0	7,53		537,88		185 0	19 0	9,57		423,44		181 0
		5		6,66				6		3,60				5		2,25	
1	5,56	5	728,39	6,53	9	1	7,59	5	534,28	3,55	9	1	9,62	5	421,19	2,22	9
2	5,61	5	721,86	6,42	8	2	7,64	5	530,73	3,50	8	2	9,67	5	418,97	2,21	8
3	5,66	5	715,44	6,30	7	3	7,69	5	527,23	3,46	7	3	9,72	6	416,76	2,18	7
4	5,71	5	709,14	6,20	6	4	7,74	5	523,77	3,41	6	4	9,78	5	414,58	2,16	6
5	5,77		702,94		5	5	7,79		520,36		5	5	9,83		412,42		5
		5		6,10				5		3,37				5		2,14	
6	5,82	5	696,84	5,99	4	6	7,84	5	516,99	3,32	4	6	9,88	5	410,28	2,12	4
7	5,87	5	690,85	5,89	3	7	7,89	5	513,67	3,29	3	7	9,93	5	408,16	2,09	3
8	5,92	5	684,96	5,79	2	8	7,94	5	510,38	3,24	2	8	9,98	5	406,07	2,07	2
9	5,97	5	679,17	5,70	1	9	7,99	5	507,14	3,20	1	9	10,03	5	404,00	2,05	1
12ᶜ 0	6,02		673,47		188 0	16 0	8,04		503,94		184 0	20 0	10,08		401,95		180 0
		5		5,60				5		3,16				5		2,03	
1	6,07	5	667,87	5,50	9	1	8,09	5	500,78	3,13	9	1	10,13	6	399,92	2,02	9
2	6,12	5	662,37	5,42	8	2	8,14	5	497,65	3,09	8	2	10,19	5	397,90	2,00	8
3	6,17	5	656,95	5,33	7	3	8,19	6	494,56	3,05	7	3	10,24	5	395,90	1,97	7
4	6,22	5	651,62	5,25	6	4	8,25	5	491,51	3,01	6	4	10,29	5	393,93	1,95	6
5	6,27		646,37		5	5	8,30		488,50		5	5	10,34		391,98		5
		5		5,17				5		2,97				5		1,94	
6	6,32	5	641,20	5,08	4	6	8,35	5	485,53	2,94	4	6	10,39	5	390,04	1,92	4
7	6,37	5	636,12	5,00	3	7	8,40	5	481,59	2,91	3	7	10,44	5	388,12	1,90	3
8	6,42	5	631,12	4,92	2	8	8,45	5	479,68	2,88	2	8	10,49	5	386,22	1,88	2
9	6,47	5	626,20	4,85	1	9	8,50	5	476,80	2,84	1	9	10,54	6	384,34	1,86	1
13ᶜ 0	6,52		621,35		187 0	17 0	8,55		473,96		183 0	21 0	10,60		382,48		179 0
		5		4,78				5		2,80				5		1,85	
1	6,57	5	616,57	4,71	9	1	8,60	5	471,16	2,77	9	1	10,65	5	380,63	1,83	9
2	6,62	5	611,86	4,63	8	2	8,65	5	468,39	2,74	8	2	10,70	5	378,80	1,81	8
3	6,67	5	607,23	4,56	7	3	8,70	5	465,65	2,71	7	3	10,75	5	376,99	1,79	7
4	6,72	5	602,67	4,50	6	4	8,75	6	462,94	2,68	6	4	10,80	5	375,20	1,78	6
5	6,78		598,17		5	5	8,81		460,26		5	5	10,85		373,42		5
		5		4,43				5		2,65				5		1,76	
6	6,83	5	593,74	4,37	4	6	8,86	5	457,61	2,62	4	6	10,90	6	371,66	1,75	4
7	6,88	5	589,37	4,30	3	7	8,91	5	454,99	2,59	3	7	10,96	5	369,91	1,73	3
8	6,93	5	585,07	4,24	2	8	8,96	5	452,40	2,56	2	8	11,01	5	368,18	1,71	2
9	6,98	5	580,83	4,19	1	9	9,01	5	449,84	2,53	1	9	11,06	5	366,47	1,70	1
14ᶜ 0	7,03		576,64		186 0	18 0	9,06		447,31		182 0	22 0	11,11		364,77		178 0
	Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.

TABLE I. Argument, *Angle à réduire.*

Angle.	Tang.	D	Cotang.	Diff		Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff		Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff	
		5		1°69				5		1°12				5		81	
22° 1	11°16	5	363°08	1,67	178° 9	27° 1	13°76	5	294°58	1,12	172° 9	32° 1	16°40	5	247°14	80	167° 9
2	11,21	6	361,41	1,65	8	2	13,81	5	293,46	1,11	8	2	16,45	6	246,34	80	8
3	11,27	5	359,76	1,64	7	3	13,86	6	292,35	1,10	7	3	16,51	5	245,54	79	7
4	11,32	5	358,12	1,62	6	4	13,92	5	291,25	1,09	6	4	16,56	5	244,75	79	6
5	11,37		356,50		5	5	13,97		290,16		5	5	16,61		243,96		5
		5		1,61				5		1,09				6		78	
6	11,42		354,89		4	6	14,02	5	289,07		4	6	16,67	5	243,18		4
7	11,47	5	353,29	1,60	3	7	14,07	6	287,99	1,08	3	7	16,72	5	242,41	77	3
8	11,52	5	351,71	1,58	2	8	14,13	5	286,92	1,07	2	8	16,77	6	241,64	77	2
9	11,58	6	350,14	1,57	1	9	14,18	5	285,86	1,06	1	9	16,83	5	240,87	77	1
23 0	11,63	5	348,58	1,56	177 0	28 0	14,23		284,81	1,05	172 0	33 0	16,88		240,11	76	167 0
		5		1,54				5		1,05				5		76	
1	11,68		347,04		9	1	14,28	6	283,76		9	1	16,93	6	239,35		9
2	11,73	5	345,51	1,53	8	2	14,34	5	282,72	1,04	8	2	16,99	5	238,59	76	8
3	11,78	5	343,99	1,52	7	3	14,39	5	281,69	1,03	7	3	17,04	5	237,84	75	7
4	11,83	5	342,49	1,50	6	4	14,44	5	280,67	1,02	6	4	17,09	6	237,09	75	6
5	11,88	5	341,00	1,49	5	5	14,49	5	279,65	1,02	5	5	17,15		236,35	74	5
		6		1,48				6		1,01				5		74	
6	11,94		339,52		4	6	14,55	5	278,64		4	6	17,20	5	235,61		4
7	11,99	5	338,05	1,47	3	7	14,60	5	277,63	1,01	3	7	17,25	6	234,88	73	3
8	12,04	5	336,60	1,45	2	8	14,65	5	276,63	1,00	2	8	17,31	5	234,15	73	2
9	12,09	5	335,16	1,44	1	9	14,70	6	275,64	99	1	9	17,36	6	233,43	72	1
24 0	12,14	5	333,73	1,43	176 0	29 0	14,76		274,66	98	171 0	34 0	17,42		232,71	72	166 0
		6		1,42				5		98				5		72	
1	12,20		332,31		9	1	14,81	5	273,68		9	1	17,47	5	231,99		9
2	12,25	5	330,90	1,41	8	2	14,86	5	272,71	97	8	2	17,52	6	231,28	71	8
3	12,30	5	329,51	1,39	7	3	14,91	6	271,75	96	7	3	17,58	5	230,57	71	7
4	12,35	5	328,13	1,38	6	4	14,97	5	270,79	96	6	4	17,63	6	229,87	70	6
5	12,40	5	326,76	1,37	5	5	15,02		269,84	95	5	5	17,69		229,17	70	5
		6		1,36				5		95				5		70	
6	12,46		325,40		4	6	15,07	6	268,89		4	6	17,74	5	228,47		4
7	12,51	5	324,05	1,35	3	7	15,13	5	267,95	94	3	7	17,79	6	227,78	69	3
8	12,56	5	322,71	1,34	2	8	15,18	5	267,02	93	2	8	17,85	5	227,09	69	2
9	12,61	5	321,38	1,33	1	9	15,23	5	266,09	93	1	9	17,90	6	226,41	68	1
25 0	12,66	5	320,06	1,32	175 0	30 0	15,28		265,17	92	170 0	35 0	17,96		225,73	68	165 0
		6		1,31				6		91				5		68	
1	12,72		318,75		9	1	15,34	5	264,26		9	1	18,05	5	225,05		9
2	12,77	5	317,45	1,30	8	2	15,39	5	263,35	91	8	2	18,06	6	224,38	67	8
3	12,82	5	316,16	1,29	7	3	15,44	6	262,45	90	7	3	18,12	5	223,71	67	7
4	12,87	5	314,88	1,28	6	4	15,50	5	261,55	90	6	4	18,17	6	223,04	66	6
5	12,92		313,61	1,27	5	5	15,55		260,66	89	5	5	18,23		222,38		5
		6		1,26				5		89				5		66	
6	12,98		312,35		4	6	15,60	6	259,77		4	6	18,28	5	221,72		4
7	13,03	5	311,10	1,25	3	7	15,66	5	258,89	88	3	7	18,33	6	221,07	65	3
8	13,08	5	309,86	1,24	2	8	15,71	5	258,02	87	2	8	18,39	5	220,42	65	2
9	13,13	5	308,63	1,23	1	9	15,76	5	257,15	87	1	9	18,44	6	219,77	64	1
26 0	13,18	5	307,41	1,22	174 0	31 0	15,81		256,29	86	169 0	36 0	18,50		219,13		164 0
		6		1,21				6		86				5		64	
1	13,24		306,20		9	1	15,87	5	255,43		9	1	18,55	5	218,49		9
2	13,29	5	305,00	1,20	8	2	15,92	5	254,58	85	8	2	18,60	6	217,85	64	8
3	13,34	5	303,81	1,19	7	3	15,97	6	253,73	85	7	3	18,66	5	217,21	64	7
4	13,39	6	302,63	1,18	6	4	16,03	5	252,89	84	6	4	18,71	6	216,58	63	6
5	13,45		301,45	1,18	5	5	16,08		252,05	84	5	5	18,77		215,96	62	5
		5		1,17				5		83				5		63	
6	13,50		300,28		4	6	16,13	6	251,22		4	6	18,82	6	215,33		4
7	13,55	5	299,12	1,16	3	7	16,19	5	250,40	82	3	7	18,88	5	214,71	62	3
8	13,60	5	297,97	1,15	2	8	16,24	5	249,58	82	2	8	18,93	5	214,10	61	2
9	13,65	5	296,83	1,14	1	9	16,29	6	248,78	82	1	9	18,98	6	213,48	62	1
27 0	13,71	6	295,70	1,13	173 0	32 0	16,35		247,95	81	168 0	37 0	19,04		212,87	61	163 0
	Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.

TABLE I. Argument, *Angle à réduire.*

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
			5		61		
37°	1	19",09	6	212",26	60	162°	9
	2	19,15	5	211,66	60		8
	3	19,20	6	211,06	60		7
	4	19,26	5	210,46	59		6
	5	19,31		209,87			5
			6		60		
	6	19,37	5	209,27	59		4
	7	19,42	6	208,68	58		3
	8	19,48	5	208,10	58		2
	9	19,53	6	207,52	58		1
38	0	19,59		206,94		162	0
			5		58		
	1	19,64	5	206,36	57		9
	2	19,69	6	205,79	58		8
	3	19,75	5	205,21	57		7
	4	19,80	6	204,64	56		6
	5	19,86		204,08			5
			5		56		
	6	19,91	6	203,52	56		4
	7	19,97	5	202,96	56		3
	8	20,02	6	202,40	55		2
	9	20,08	5	201,85	55		1
39	0	20,13		201,30		161	0
			6		55		
	1	20,19	5	200,75	55		9
	2	20,24	6	200,20	54		8
	3	20,30	5	199,66	54		7
	4	20,35	6	199,12	54		6
	5	29,41		198,58			5
			5		53		
	6	20,46	6	198,05	54		4
	7	20,52	5	197,51	53		3
	8	20,57	6	196,98	52		2
	9	20,63	6	196,46	53		1
40	0	20,69		195,93		160	0
			5		52		
	1	20,74	6	195,41	52		9
	2	20,80	5	194,89	52		8
	3	20,85	6	194,37	51		7
	4	20,91	5	193,86	52		6
	5	20,96		193,34			5
			6		51		
	6	21,02	5	192,83	50		4
	7	21,07	6	192,33	51		3
	8	21,13	5	191,82	50		2
	9	21,18	6	191,32	50		1
41	0	21,24		190,82		159	0
			6		50		
	1	21,30	5	190,32	49		9
	2	21,35	6	189,83	50		8
	3	21,41	5	189,33	49		7
	4	21,46	6	188,84	49		6
	5	21,52		188,35			5
			5		48		
	6	21,57	6	187,87	49		4
	7	21,63	5	187,38	48		3
	8	21,68	6	186,90	48		2
	9	21,74	6	186,42	48		1
42	0	21,80		185,94		158	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
			5		47		
42°	1	21",85	6	185",47	48	157°	9
	2	21,91	5	184,99	47		8
	3	21,96	6	184,52	47		7
	4	22,02	6	184,05	46		6
	5	22,08		183,59			5
			5		47		
	6	22,13	6	183,12	46		4
	7	22,19	5	182,66	46		3
	8	22,24	6	182,20	46		2
	9	22,30	6	181,74	46		1
43	0	22,36		181,28		157	0
			5		45		
	1	22,41	6	180,83	45		9
	2	22,47	6	180,38	45		8
	3	22,53	5	179,93	45		7
	4	22,58	6	179,48	45		6
	5	22,64		179,03			5
			5		44		
	6	22,69	6	178,59	45		4
	7	22,75	5	178,14	44		3
	8	22,80	6	177,70	44		2
	9	22,86	6	177,26	43		1
44	0	22,92		176,83		156	0
			6		44		
	1	22,98	5	176,39	43		9
	2	23,03	6	175,96	43		8
	3	23,09	6	175,53	43		7
	4	23,15	5	175,10	43		6
	5	23,20		174,67			5
			6		42		
	6	23,26	6	174,25	43		4
	7	23,32	5	173,82	42		3
	8	23,37	6	173,40	42		2
	9	23,43	6	172,98	42		1
45	0	23,49		172,56		155	0
			5		41		
	1	23,54	6	172,15	42		9
	2	23,60	6	171,73	41		8
	3	23,66	5	171,32	41		7
	4	23,71	6	170,91	41		6
	5	23,77		170,50			5
			6		41		
	6	23,83	5	170,09	40		4
	7	23,88	6	169,69	41		3
	8	23,94	6	169,28	40		2
	9	24,00	6	568,88	40		1
46	0	24,06		168,48		154	0
			5		40		
	1	24,11	6	168,08	40		9
	2	24,17	6	167,68	40		8
	3	24,23	5	167,28	39		7
	4	24,28	6	166,89	39		6
	5	24,34		166,50			5
			6		39		
	6	24,40	6	166,11	39		4
	7	24,46	5	165,72	39		3
	8	24,51	6	165,33	39		2
	9	24,57	6	164,94	38		1
47	0	24,63		164,56		153	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
			6		39		
47°	1	24",69	5	164",17	38	152°	
	2	24,74	6	163,79	38		
	3	24,80	6	163,41	38		
	4	24,86	6	163,03	38		
	5	24,92		162,65			
			5		37		
	6	24,97	6	162,28	37		
	7	25,03	6	161,91	38		
	8	25,09	6	161,53	37		
	9	25,15	6	161,16	37		
48	0	25,21		160,79		152	
			5		37		
	1	25,26	6	160,42	36		
	2	25,32	6	160,06	37		
	3	25,38	6	159,69	36		
	4	25,44	6	159,33	36		
	5	25,50		158,97			
			5		37		
	6	25,55	6	158,60	36		
	7	25,61	6	158,24	35		
	8	25,67	6	157,89	36		
	9	25,73	6	157,53	35		
49	0	25,79		157,18		151	
			5		36		
	1	35,84	6	156,82	35		
	2	25,90	6	156,47	35		
	3	25,96	6	156,12	35		
	4	26,02	6	155,77	35		
	5	26,08		155,42			
			6		35		
	6	26,14	5	155,07	35		
	7	26,19	6	154,72	34		
	8	26,25	6	154,38	34		
	9	26,31	6	154,04	35		
50	0	26,37		153,69		150	
			6		34		
	1	26,43	6	153,35	34		
	2	26,49	6	153,01	34		
	3	26,55	5	152,67	33		
	4	26,60	6	152,34	34		
	5	26,66		152,00			
			6		33		
	6	26,72	6	151,67	34		
	7	26,78	6	151,33	33		
	8	26,84	6	151,00	33		
	9	26,90	6	150,67	33		
51	0	26,96		150,34		149	
			6		33		
	1	27,02	6	150,01	32		
	2	27,08	5	149,69	33		
	3	27,13	6	149,36	32		
	4	27,19	6	149,04	33		
	5	27,25		148,71			
			6		32		
	6	27,31	6	148,39	32		
	7	27,37	6	148,07	32		
	8	27,43	6	147,75	32		
	9	27,49	6	147,43	31		
52	0	27,55		147,12		148	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

TABLE I. Argument, *Angle à réduire.*

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
52°	1	27°61	6	146°80	32	147°	9
	2	27,67	6	146,48	32		8
	3	27,73	6	146,17	31		7
	4	27,79	6	145,86	31		6
	5	27,85	6	145,54	32		5
	6	27,91	6	145,23	31		4
	7	27,97	6	144,92	31		3
	8	28,03	5	144,61	30		2
	9	28,08	6	144,31	31		1
53	0	28,14	6	144,00	30	147	0
	1	28,20	6	143,70	31		9
	2	28,26	6	143,39	30		8
	3	28,32	6	143,09	30		7
	4	28,38	6	142,79	30		6
	5	28,44	6	142,49	30		5
	6	28,50	6	142,19	30		4
	7	28,56	6	141,89	30		3
	8	28,62	6	141,59	30		2
	9	28,68	6	141,29	29		1
54	0	28,74	6	141,00	30	146	0
	1	28,80	6	140,70	29		9
	2	28,86	6	140,41	30		8
	3	28,92	7	140,11	29		7
	4	28,99	6	139,82	29		6
	5	29,05	6	139,53	29		5
	6	29,11	6	139,24	29		4
	7	29,17	6	138,95	28		3
	8	29,23	6	138,67	29		2
	9	29,29	6	138,38	29		1
55	0	29,35	6	138,09	28	145	0
	1	29,41	6	137,81	28		9
	2	29,47	6	137,53	29		8
	3	29,53	6	137,24	28		7
	4	29,59	6	136,96	28		6
	5	29,65	6	136,68	28		5
	6	29,71	6	136,40	28		4
	7	29,77	7	136,12	28		3
	8	29,84	6	135,84	28		2
	9	29,90	6	135,56	27		1
56	0	29,96	6	135,29	28	144	0
	1	30,02	6	135,01	27		9
	2	30,08	6	134,74	27		8
	3	30,14	6	134,47	28		7
	4	30,20	6	134,19	27		6
	5	30,26	6	133,92	27		5
	6	30,32	7	133,65	27		4
	7	30,39	6	133,38	27		3
	8	30,45	6	133,11	27		2
	9	30,51	6	132,84	27		1
57	0	30,57		132,58	26	143	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
57°	1	30°63	6	132°31	27	142°	9
	2	30,69	6	132,04	27		8
	3	30,75	6	131,78	26		7
	4	30,82	7	131,52	26		6
	5	30,88	6	131,25	27		5
	6	30,94	6	130,99	26		4
	7	31,00	6	130,73	26		3
	8	31,06	6	130,47	26		2
	9	31,13	6	130,21	26		1
58	0	31,19	6	129,95	26	142	0
	1	31,25	6	129,69	25		9
	2	31,31	6	129,44	26		8
	3	31,37	7	129,18	26		7
	4	31,44	6	128,92	25		6
	5	31,50	6	128,67	26		5
	6	31,56	6	128,41	25		4
	7	31,62	7	128,16	25		3
	8	31,69	6	127,91	25		2
	9	31,75	6	127,66	25		1
59	0	31,81	6	127,41	25	141	0
	1	31,87	7	127,16	25		9
	2	31,94	6	126,91	25		8
	3	32,00	6	126,66	25		7
	4	32,06	6	126,41	24		6
	5	32,12	7	126,17	25		5
	6	32,19	6	125,92	24		4
	7	32,25	6	125,68	25		3
	8	32,31	6	125,43	24		2
	9	32,37	7	125,19	25		1
60	0	32,44	6	124,94	24	140	0
	1	32,50	6	124,70	24		9
	2	32,56	7	124,46	24		8
	3	32,63	6	124,22	24		7
	4	32,69	6	123,98	24		6
	5	32,75	6	123,74	24		5
	6	32,81	7	123,50	23		4
	7	32,88	6	123,27	24		3
	8	32,94	7	123,03	24		2
	9	33,01	6	122,79	24		1
61	0	33,07	6	122,55	23	139	0
	1	33,13	7	122,32	23		9
	2	33,20	6	122,09	24		8
	3	33,26	6	121,85	23		7
	4	33,32	7	121,62	23		6
	5	33,39	6	121,39	23		5
	6	33,45	7	121,16	23		4
	7	33,52	6	120,93	23		3
	8	33,58	6	120,70	23		2
	9	33,64	6	120,47	23		1
62	0	33,70		120,24		138	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
62°	1	33°77	7	120°01	23	137°	9
	2	33,84	7	119,78	23		8
	3	33,90	6	119,55	22		7
	4	33,96	6	119,33	23		6
	5	34,03	7	119,10	22		5
	6	34,09	7	118,88	23		4
	7	34,16	6	118,65	22		3
	8	34,22	7	118,43	22		2
	9	34,29	6	118,21	22		1
63	0	34,35		117,99	23	137	0
	1	34,41	6	117,76	22		9
	2	34,47	7	117,54	22		8
	3	34,54	7	117,32	22		7
	4	34,61	6	117,10	21		6
	5	34,67	6	116,89	22		5
	6	34,73	7	116,67	22		4
	7	34,80	7	116,45	22		3
	8	34,87	6	116,23	21		2
	9	34,93	7	116,02	22		1
64	0	35,00	6	115,80	21	136	0
	1	35,06	7	115,59	22		9
	2	35,13	6	115,37	21		8
	3	35,19	7	115,16	22		7
	4	35,26	6	114,94	21		6
	5	35,32	7	114,73	21		5
	6	35,39	7	114,52	21		4
	7	35,46	6	114,31	21		3
	8	35,52	7	114,10	21		2
	9	35,59	6	113,89	21		1
65	0	35,65	7	113,68	21	135	0
	1	35,72	6	113,47	21		9
	2	35,78	7	113,26	21		8
	3	35,85	7	113,05	21		7
	4	35,92	6	112,84	20		6
	5	35,98	7	112,64	21		5
	6	36,05	6	112,43	20		4
	7	36,11	7	112,23	21		3
	8	36,18	7	112,02	20		2
	9	36,25	6	111,82	21		1
66	0	36,31	7	111,61	20	134	0
	1	36,38	6	111,41	20		9
	2	36,44	7	111,21	21		8
	3	36,51	7	111,00	20		7
	4	36,58	6	110,80	20		6
	5	36,64	7	110,60	20		5
	6	36,71	7	110,40	20		4
	7	36,78	6	110,20	20		3
	8	36,84	7	110,00	20		2
	9	36,91	7	109,80	20		1
67	0	36,98		109,60		133	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

TABLE I. Argument, *Angle à réduire.*

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
67°	1	37°04	7	109°41	19	132°	9
	2	37,11	7	109,21	20		8
	3	37,18	7	109,01	20		7
	4	37,25	7	108,81	19		6
	5	37,31	6	108,62			5
			7		20		
	6	37,38	7	108,42	19		4
	7	37,45	7	108,23	20		3
	8	37,51	6	108,03	19		2
	9	37,58	7	107,84	19		1
68	0	37,65	7	107,65		132	0
			7		20		
	1	37,72	7	107,45	19		9
	2	37,78	6	107,26	19		8
	3	37,85	7	107,07	19		7
	4	37,92	7	106,88	19		6
	5	37,99	7	106,69			5
			7		19		
	6	38,06	7	106,50	19		4
	7	38,12	6	106,31	19		3
	8	38,19	7	106,12	19		2
	9	38,26	7	105,93	19		1
69	0	38,33	7	105,74		131	0
			7		19		
	1	38,40	7	105,55	18		9
	2	38,46	6	105,37	19		8
	3	38,53	7	105,18	19		7
	4	38,60	7	104,99	19		6
	5	38,67	7	104,80			5
			7		18		
	6	38,74	7	104,62	18		4
	7	38,81	6	104,44	19		3
	8	38,87	7	104,25	18		2
	9	38,94	7	104,07	18		1
70	0	39,01	7	103,89		130	0
			7		19		
	1	39,08	7	103,70	18		9
	2	39,15	7	103,52	18		8
	3	39,22	7	103,34	18		7
	4	39,29	7	103,16	18		6
	5	39,36	7	102,98			5
			7		18		
	6	39,43	7	102,80	18		4
	7	39,50	7	102,62	18		3
	8	39,56	6	102,44	18		2
	9	39,63	7	102,26	18		1
71	0	39,70	7	102,08		129	0
			7		18		
	1	39,77	7	101,90	18		9
	2	39,84	7	101,72	18		8
	3	39,91	7	101,54	18		7
	4	39,98	7	101,36	17		6
	5	40,05	7	101,19			5
			7		17		
	6	40,12	7	101,02	18		4
	7	40,19	7	100,84	18		3
	8	40,26	7	100,66	17		2
	9	40,33	7	100,49	17		1
72	0	40,40	7	100,32		128	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
72°	1	40°47	7	100°14	17	127°	9
	2	40,54	7	99,97	17		8
	3	40,61	7	99,79	18		7
	4	40,68	7	99,62	17		6
	5	40,75	7	99,45	17		5
			7		17		
	6	40,82	7	99,28	17		4
	7	40,89	7	99,11	17		3
	8	40,96	8	98,94	17		2
	9	41,04	7	98,77	17		1
73	0	41,11	7	98,60		127	0
			7		17		
	1	41,18	7	98,43	17		9
	2	41,25	7	98,26	17		8
	3	41,32	7	98,09	17		7
	4	41,39	7	97,92	17		6
	5	41,46	7	97,75			5
			7		17		
	6	41,53	7	97,58	16		4
	7	41,60	8	97,42	17		3
	8	41,68	7	97,25	17		2
	9	41,75	7	97,08	16		1
74	0	41,82	7	96,92		126	0
			7		17		
	1	41,89	7	96,75	16		9
	2	41,96	7	96,59	17		8
	3	42,03	7	96,42	16		7
	4	42,10	8	96,26	17		6
	5	42,18		96,09			5
			7		16		
	6	42,25	7	95,93	17		4
	7	42,32	7	95,76	16		3
	8	42,39	8	95,60	16		2
	9	42,47	7	95,44	16		1
75	0	42,54	7	95,28		125	0
			7		16		
	1	42,61	7	95,12	17		9
	2	42,68	7	94,95	16		8
	3	42,75	8	94,79	16		7
	4	42,83	7	94,63	16		6
	5	42,90	7	94,47			5
			7		16		
	6	42,97	8	94,31	16		4
	7	43,05	7	94,15	16		3
	8	43,12	7	93,99	16		2
	9	43,19	7	93,83	15		1
76	0	43,26	7	93,68		124	0
			8		16		
	1	43,34	7	93,52	16		9
	2	43,41	8	93,36	16		8
	3	43,49	7	93,20	15		7
	4	43,56	7	93,05	16		6
	5	43,63	7	92,89			5
			7		16		
	6	43,70	8	92,73	15		4
	7	43,78	7	92,58	16		3
	8	43,85	8	92,42	15		2
	9	43,93	7	92,27	16		1
77	0	44,00	7	92,11		123	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
77°	1	44°07	7	91°96	15	122°	9
	2	44,15	8	91,80	16		8
	3	44,22	7	91,65	15		7
	4	44,30	8	91,50	15		6
	5	44,37	7	91,34	16		5
			7		15		
	6	44,44	7	91,19	15		4
	7	44,52	8	91,04	15		3
	8	44,59	7	90,89	16		2
	9	44,67	8	90,73	15		1
78	0	44,74	7	90,58		122	0
			8		15		
	1	44,82	7	90,43	15		9
	2	44,89	8	90,28	15		8
	3	44,97	7	90,13	15		7
	4	45,04	8	89,98	15		6
	5	45,12		89,83			5
			7		15		
	6	45,19	8	89,68	15		4
	7	45,27	7	89,53	15		3
	8	45,34	8	89,38	14		2
	9	45,42	7	89,24	15		1
79	0	45,49	7	89,09		121	0
			8		15		
	1	45,57	7	88,94	14		9
	2	45,64	8	88,79	15		8
	3	45,72	8	88,64	14		7
	4	45,80	8	88,50	15		6
	5	45,87	7	88,35			5
			8		15		
	6	45,95	7	88,20	14		4
	7	46,02	8	88,06	15		3
	8	46,10	8	87,91	14		2
	9	46,18	7	87,77	15		1
80	0	46,25	7	87,62		120	0
			8		14		
	1	46,33	8	87,48	15		9
	2	46,41	7	87,33	14		8
	3	46,48	8	87,19	14		7
	4	46,56	8	87,05	15		6
	5	46,64		86,90			5
			7		14		
	6	46,71	8	86,76	14		4
	7	46,79	8	86,62	14		3
	8	46,87	7	86,48	15		2
	9	46,94	8	86,33	14		1
81	0	47,02		86,19		119	0
			8		14		
	1	47,10	8	86,05	14		9
	2	47,18	7	85,91	14		8
	3	47,25	8	85,77	14		7
	4	47,33	8	85,63	14		6
	5	47,41		85,49			5
			8		14		
	6	47,49	7	85,35	14		4
	7	47,56	8	85,21	14		3
	8	47,64	8	85,07	14		2
	9	47,72	8	84,93	14		1
82	0	47,80		84,79		118	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

TABLE I. Argument, *Angle à réduire.*

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
82G	1	47"88	8	84"65	14	117G	9
	2	47,96	8	84,51	14		8
	3	48,03	8	84,37	14		7
	4	48,11	8	84,24	13		6
	5	48,19	8	84,10	14		5
			8		14		
	6	48,27	8	83,96	13		4
	7	48,35	8	83,83	14		3
	8	48,43	8	83,69	14		2
	9	48,51	8	83,55	13		1
83	0	48,59		83,42		117	0
			7		14		
	1	48,66	8	83,28	13		9
	2	48,74	8	83,15	14		8
	3	48,82	8	83,01	13		7
	4	48,90	8	82,88	14		6
	5	48,98	8	82,74	14		5
			8		13		
	6	49,06	8	82,61	14		4
	7	49,14	8	82,47	13		3
	8	49,22	8	82,34	13		2
	9	49,30	8	82,21	14		1
84	0	49,38		82,07		116	0
			8		13		
	1	49,46	8	81,94	13		9
	2	49,54	8	81,81	14		8
	3	49,62	8	81,67	13		7
	4	49,70	8	81,54	13		6
	5	49,78	8	81,41	13		5
			8		13		
	6	49,86	8	81,28	13		4
	7	49,94	9	81,15	13		3
	8	50,03	8	81,02	13		2
	9	50,11	8	80,89	14		1
85	0	50,19		80,75		115	0
			8		13		
	1	50,27	8	80,62	13		9
	2	50,35	8	80,49	13		8
	3	50,43	8	80,36	12		7
	4	50,51	8	80,24	13		6
	5	50,59	8	80,11	13		5
			9		13		
	6	50,68	8	79,98	13		4
	7	50,76	8	79,85	13		3
	8	50,84	8	79,72	13		2
	9	50,92	8	79,59	13		1
86	0	51,00		79,46		114	0
			9		12		
	1	51,09	8	79,34	13		9
	2	51,17	8	79,21	13		8
	3	51,25	8	79,08	13		7
	4	51,33	8	78,95	12		6
	5	51,42	9	78,83	13		5
			8		13		
	6	51,50	8	78,70	13		4
	7	51,58	8	78,57	12		3
	8	51,66	9	78,45	13		2
	9	51,75	8	78,32	12		1
87	0	51,83		78,20		113	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
87G	1	51"91	8	78"07	13	112G	9
	2	52,00	9	77,95	12		8
	3	52,08	8	77,82	13		7
	4	52,16	8	77,70	12		6
	5	52,25	9	77,57	13		5
			8		12		
	6	52,33	8	77,45	13		4
	7	52,41	9	77,32	12		3
	8	52,50	8	77,20	12		2
	9	52,58	9	77,08	12		1
88	0	52,67		76,96		112	0
			8		13		
	1	52,75	8	76,83	12		9
	2	52,83	9	76,71	12		8
	3	52,92	8	76,59	13		7
	4	53,00	9	76,46	12		6
	5	53,09	8	76,34	12		5
			8		12		
	6	53,17	9	76,22	12		4
	7	53,26	8	76,10	12		3
	8	53,34	9	75,98	12		2
	9	53,43	8	75,86	13		1
89	0	53,51		75,73		111	0
			9		12		
	1	53,60	8	75,61	12		9
	2	53,68	9	75,49	12		8
	3	53,77	9	75,37	12		7
	4	53,86	8	75,25	12		6
	5	53,94		75,13			5
			9		12		
	6	54,03	8	75,01	11		4
	7	54,11	9	74,90	12		3
	8	54,20	9	74,78	12		2
	9	54,29	8	74,66	12		1
90	0	54,37		74,54		110	0
			9		12		
	1	54,46	9	74,42	12		9
	2	54,55	8	74,30	11		8
	3	54,63	9	74,19	12		7
	4	54,72	9	74,07	12		6
	5	54,81		73,95			5
			8		12		
	6	54,89	9	73,83	12		4
	7	54,98	9	73,71	11		3
	8	55,07	9	73,60	12		2
	9	55,16	8	73,48	12		1
91	0	55,24		73,36		109	0
			9		11		
	1	55,33	9	73,25	12		9
	2	55,42	9	73,13	11		8
	3	55,51	8	73,02	12		7
	4	55,59	9	72,90	12		6
	5	55,68		72,78			5
			9		11		
	6	55,77	9	72,67	12		4
	7	55,86	9	72,55	11		3
	8	55,95	9	72,44	12		2
	9	56,04	9	72,32	11		1
92	0	56,13		72,21		108	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

Angle.		Tang	D	Cotang.	Diff		
92G	1	56"21	8	72"10	11	107G	9
	2	56,30	9	71,98	12		8
	3	56,39	9	71,87	11		7
	4	56,48	9	71,76	11		6
	5	56,57	9	71,64	12		5
			9		12		
	6	56,66	9	71,52	11		4
	7	56,75	9	71,41	11		3
	8	56,84	9	71,30	11		2
	9	56,93	9	71,19	11		1
93	0	57,02		71,08		107	0
			9		12		
	1	57,11	9	70,96	11		9
	2	57,20	9	70,85	11		8
	3	57,29	9	70,74	11		7
	4	57,38	9	70,63	11		6
	5	57,47	9	70,52	11		5
			9		11		
	6	57,56	9	70,41	11		4
	7	57,65	10	70,30	12		3
	8	57,75	9	70,18	11		2
	9	57,84	9	70,07	11		1
94	0	57,93		69,96		106	0
			9		11		
	1	58,02	9	69,85	11		9
	2	58,11	9	69,74	11		8
	3	58,20	9	69,63	11		7
	4	58,29	10	69,52	11		6
	5	58,39		69,41			5
			9		11		
	6	58,48	9	69,30	10		4
	7	58,57	9	69,20	11		3
	8	58,66	10	69,09	11		2
	9	58,76	9	68,98	11		1
95	0	58,85		68,87		105	0
			9		11		
	1	58,94	9	68,76	11		9
	2	59,03	10	68,65	11		8
	3	59,13	9	68,54	10		7
	4	59,22	9	68,44	11		6
	5	59,31		68,33			5
			10		11		
	6	59,41	9	68,22	11		4
	7	59,50	9	68,11	11		3
	8	59,59	10	68,00	10		2
	9	59,69	9	67,90	11		1
96	0	59,78		67,79		104	0
			10		10		
	1	59,88	9	67,69	11		9
	2	59,97	10	67,58	11		8
	3	60,07	9	67,47	11		7
	4	60,16	9	67,36	10		6
	5	60,25		67,26			5
			10		10		
	6	60,35	9	67,16	11		4
	7	60,44	10	67,05	10		3
	8	60,54	10	66,95	11		2
	9	60,64	9	66,84	11		1
97	0	60,73		66,73		103	0
		Cot.		Tang.		Angle.	

TABLE I. Argument, *Angle à réduire.*

Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff		Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff		Angle.	Tang	D	Cotang.	Diff	
		10		10				10		10				10		10	
97G 1	60"83		66"63		102G 9	98G 1	61"79		65"59		101G 9	99G 1	62"77		64"57		10
2	60,92	9	66,52	11	8	2	61,89	10	65,49	10	8	2	62,87	10	64,47	10	
3	61,02	10	66,42	10	7	3	61,98	9	65,38	11	7	3	62,97	10	64,37	10	
4	61,11	9	66,32	10	6	4	62,08	10	65,28	10	6	4	63,06	9	64,27	10	
5	61,21	10	66,21	11	5	5	62,18	10	65,18	10	5	5	63,16	10	64,16	11	
		10		10				10		10				10		10	
6	61,31		66,11		4	6	62,28		65,08		4	6	63,26		64,06		
7	61,40	9	66,00	11	3	7	62,38	10	64,98	10	3	7	63,36	10	63,96	10	
8	61,50	10	65,90	10	2	8	62,47	9	64,87	11	2	8	63,46	10	63,86	10	
9	61,60	10	65,80	10	1	9	62,57	10	64,77	10	1	9	63,56	10	63,76	10	
98 0	61,69	9	65,69	11	102 0	99 0	62,67	10	64,67	10	101 0	100 0	63,66	10	63,66	10	10
	Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		Angle.		Cot.		Tang.		A

TABLE II.

ARGUMENS, $200^{c} - (\delta + \delta')$, $\delta - \delta'$,

δ, δ' étant les distances zénitales observées.

Pour réduire à l'horizon un angle observé dans un plan incliné, prenez dans cette Table un nombre avec l'argument $200^{c} - (\delta + \delta')$, et puis un second nombre avec l'argument $\delta - \delta'$.

Pour réduire l'angle horizontal ou sphérique à l'angle des cordes, prenez dans la même Table un premier nombre avec l'argument $(P + P')$, et un second avec l'argument $(P - P')$. *Voyez* tom. I, pag. 179.

Centigr.	0c	Diff	1c	Diff	2c	Diff	3c	Diff	4c	Diff	5c	Diff
1'	0,000	0	0,629	12	2,492	25	5,588	37	9,915	49	15,476	62
2	0,000	1	0,641	12	2,517	25	5,625	37	9,965	50	15,538	62
3	0,001	0	0,654	13	2,542	25	5,662	37	10,015	50	15,600	62
4	0,001	1	0,667	13	2,567	25	5,699	38	10,065	50	15,662	62
5	0,002	0	0,680	13	2,592	25	5,737	38	10,115	50	15,724	62
6	0,002	1	0,693	13	2,617	25	5,775	38	10,165	50	15,786	62
7	0,003	1	0,706	13	2,642	26	5,813	38	10,215	50	15,848	62
8	0,004	1	0,719	13	2,668	26	5,851	38	10,265	50	15,910	63
9	0,005	1	0,732	14	2,694	26	5,889	38	10,315	50	15,973	63
10	0,006	2	0,746	14	2,720	26	5,927	38	10,365	51	16,036	63
11	0,008	1	0,760	14	2,746	26	5,965	38	10,416	51	16,099	63
12	0,009	1	0,774	14	2,772	26	6,003	39	10,467	51	16,162	63
13	0,010	2	0,788	14	2,798	26	6,042	39	10,518	51	16,225	63
14	0,012	2	0,802	14	2,824	26	6,081	39	10,569	51	16,288	63
15	0,014	2	0,816	14	2,850	27	6,120	39	10,620	51	16,351	63
16	0,016	2	0,830	14	2,877	27	6,159	39	10,671	51	16,414	64
17	0,018	2	0,844	14	2,904	27	6,198	39	10,722	52	16,478	64
18	0,020	2	0,858	14	2,931	27	6,237	39	10,774	52	16,542	64
19	0,022	2	0,873	15	2,958	27	6,276	39	10,826	52	16,606	64
20	0,024	3	0,888	15	2,985	27	6,315	39	10,878	52	16,670	64
21	0,027	3	0,903	15	3,012	27	6,354	39	10,930	52	16,734	64
22	0,030	3	0,918	15	3,039	28	6,394	40	10,982	52	16,798	64
23	0,033	3	0,933	15	3,067	28	6,434	40	11,034	52	16,862	65
24	0,036	3	0,948	15	3,095	28	6,474	40	11,086	52	16,927	65
25	0,039	3	0,963	15	3,123	28	6,514	40	11,138	52	16,992	65
26	0,042	3	0,979	16	3,151	28	6,554	40	11,190	52	17,057	65
27	0,045	3	0,995	16	3,179	28	6,594	40	11,242	53	17,122	65
28	0,048	4	1,011	16	3,207	28	6,634	41	11,295	53	17,187	65
29	0,052	4	1,027	16	3,235	28	6,675	41	11,348	53	17,252	65
30	0,056	4	1,043	16	3,263	28	6,716	41	11,401	53	17,317	65
31	0,060	4	1,059	16	3,291	28	6,757	41	11,454	53	17,382	66
32	0,064	4	1,075	16	3,319	29	6,798	41	11,507	53	17,448	66
33	0,068	4	1,091	16	3,348	29	6,839	41	11,560	54	17,514	66
34	0,072	4	1,107	17	3,377	29	6,880	41	11,614	54	17,580	66
35	0,076	4	1,124	17	3,406	29	6,921	41	11,668	54	17,646	66
36	0,080	4	1,141	17	3,435	29	6,962	42	11,722	54	17,712	66
37	0,084	5	1,158	17	3,464	29	7,004	42	11,776	54	17,778	66
38	0,089	5	1,175	17	3,493	30	7,046	42	11,830	54	17,844	66
39	0,094	5	1,192	17	3,523	30	7,088	42	11,884	54	17,910	66
40	0,099		1,209		3,553		7,130		11,938		17,976	

TABLE II. Argumens, 200° — (δ + δ′), δ — δ′.

Centigr.	0°	Diff	1°	Diff	2°	Diff	3°	Diff	4°	Diff	5°	Diff
41′	0,104	5	1,226	17	3,582	30	7,172	42	11,992	54	18,043	67
42	0,109	5	1,243	17	3,612	30	7,214	42	12,046	54	18,110	67
43	0,114	5	1,261	18	3,642	30	7,256	42	12,100	54	18,177	67
44	0,119	5	1,279	18	3,672	30	7,298	42	12,155	55	18,244	67
45	0,124	6	1,297	18	3,702	30	7,340	42	12,210	55	18,311	67
46	0,130	6	1,315	18	3,732	30	7,383	43	12,265	55	18,378	67
47	0,136	6	1,333	18	3,762	30	7,426	43	12,320	55	18,445	67
48	0,142	6	1,351	18	3,792	31	7,469	43	12,375	55	18,512	68
49	0,148	6	1,369	18	3,823	31	7,512	43	12,430	56	18,580	68
50	0,154	6	1,387	19	3,854	31	7,555	43	12,486	56	18,648	68
51	0,160	6	1,406	19	3,885	31	7,598	43	12,542	56	18,716	68
52	0,166	7	1,425	19	3,916	31	7,641	43	12,598	56	18,784	68
53	0,173	7	1,444	19	3,947	31	7,684	44	12,654	56	18,852	68
54	0,180	7	1,463	19	3,978	32	7,728	44	12,710	56	18,920	68
55	0,187	7	1,482	19	4,010	32	7,772	44	12,766	56	18,988	69
56	0,194	7	1,501	19	4,042	32	7,816	44	12,822	56	19,057	69
57	0,201	7	1,520	19	4,074	32	7,860	44	12,878	56	19,126	69
58	0,208	7	1,539	20	4,106	32	7,904	44	12,934	56	19,195	69
59	0,215	7	1,559	20	4,138	32	7,948	44	12,990	57	19,264	69
60	0,222	7	1,579	20	4,170	32	7,992	44	13,047	57	19,333	69
61	0,229	8	1,599	20	4,202	32	8,036	45	13,104	57	19,402	69
62	0,237	8	1,619	20	4,234	32	8,081	45	13,161	57	19,471	69
63	0,245	8	1,639	20	4,266	33	8,126	45	13,218	57	19,540	69
64	0,253	8	1,659	20	4,299	33	8,171	45	13,275	57	19,609	70
65	0,261	8	1,679	20	4,332	33	8,216	45	13,332	57	19,679	70
66	0,269	8	1,699	21	4,365	33	8,261	45	13,389	57	19,749	70
67	0,277	8	1,720	21	4,398	33	8,306	45	13,446	58	19,819	70
68	0,285	8	1,741	21	4,431	33	8,351	45	13,504	58	19,889	70
69	0,293	9	1,762	21	4,464	33	8,396	46	13,562	58	19,959	70
70	0,302	9	1,783	21	4,497	33	8,442	46	13,620	58	20,029	70
71	0,311	9	1,804	21	4,530	33	8,488	46	13,678	58	20,099	70
72	0,320	9	1,825	21	4,563	33	8,534	46	13,736	58	20,169	70
73	0,329	9	1,846	21	4,596	34	8,580	46	13,794	58	20,240	71
74	0,338	9	1,867	22	4,630	34	8,626	46	13,852	58	20,311	71
75	0,347	9	1,889	22	4,664	34	8,672	46	13,911	59	20,382	71
76	0,356	9	1,911	22	4,698	34	8,718	46	13,970	59	20,453	71
77	0,365	10	1,933	22	4,732	34	8,764	47	14,029	59	20,524	71
78	0,375	10	1,955	22	4,766	34	8,811	47	14,088	59	20,595	71
79	0,385	10	1,977	22	4,800	35	8,858	47	14,147	59	20,666	71
80	0,395	10	1,999	22	4,835	35	8,905	47	14,206	59	20,737	71
81	0,405	10	2,021	22	4,870	35	8,952	47	14,265	59	20,808	72
82	0,415	10	2,043	22	4,905	35	8,999	47	14,324	59	20,880	72
83	0,425	10	2,065	23	4,940	35	9,046	47	14,383	60	20,952	72
84	0,435	10	2,088	23	4,975	35	9,093	47	14,443	60	21,024	72
85	0,445	11	2,111	23	5,010	35	9,140	48	14,503	60	21,096	72
86	0,456	11	2,134	23	5,045	35	9,188	48	14,563	60	21,168	72
87	0,467	11	2,157	23	5,080	36	9,236	48	14,623	60	21,240	72
88	0,478	11	2,180	23	5,116	36	9,284	48	14,683	60	21,312	72
89	0,489	11	2,203	23	5,152	36	9,332	48	14,743	60	21,384	72
90	0,500	11	2,226	24	5,188	36	9,380	48	14,803	60	21,456	73
91	0,511	11	2,250	24	5,224	36	9,428	48	14,863	61	21,529	73
92	0,522	11	2,274	24	5,260	36	9,476	48	14,924	61	21,602	73
93	0,533	12	2,298	24	5,296	36	9,524	48	14,985	61	21,675	73
94	0,545	12	2,322	24	5,332	36	9,572	49	15,046	61	21,748	73
95	0,557	12	2,346	24	5,368	36	9,621	49	15,107	61	21,821	74
96	0,569	12	2,370	24	5,404	36	9,670	49	15,168	61	21,895	74
97	0,581	12	2,394	24	5,440	37	9,719	49	15,229	61	21,969	74
98	0,593	12	2,418	24	5,477	37	9,768	49	15,290	62	22,043	74
99	0,605	12	2,442	25	5,514	37	9,817	49	15,352	62	22,117	74
100	0,617		2,467		5,551		9,866		15,414		22,191	

TABLE III.

PREMIÈRE PARTIE.

Pour réduire à l'horizon, le nombre tangente est positif, et le nombre cotangente négatif. C'est le contraire pour l'angle des cordes.

Argument, *Angle à réduire.*

Angle. D. M.	Tang	Cotang.		Angle. D. M.	Tang	Cotang.		Angle. D. M.	Tang	Cotang.		Angle. D. M.	Tang	Cotang.	
0 0	0"00	∞"	180 0	8 0	1,44	294"98	172 0	16 0	2"90	146"77	164 0	24 0	4"38	97,04	156 0
10	0,03	14181, 5	50	10	1,47	288,93	50	10	2,93	145,23	50	10	4,41	96,35	50
20	0,06	7090, 8	40	20	1,50	283,14	40	20	2,96	143,72	40	20	4,45	95,67	40
30	0,09	4727, 2	30	30	1,53	277,56	30	30	2,99	142,26	30	30	4,48	95,00	30
40	0,12	3545, 4	20	40	1,56	272,20	20	40	3,02	140,82	20	40	4,51	94,34	20
50	0,15	2836, 3	10	50	1,59	267,05	10	50	3,05	139,40	10	50	4,54	93,68	10
1 0	0,18	2363, 3	179 0	9 0	1,62	262,09	171 0	17 0	3,08	138,02	163 0	25 0	4,57	93,04	155 0
10	0,21	2025, 9	50	10	1,65	257,30	50	10	3,11	136,66	50	10	4,60	92,40	50
20	0,24	1772, 6	40	20	1,68	252,68	40	20	3,14	135,32	40	20	4,63	91,77	40
30	0,27	1575, 7	30	30	1,71	248,23	30	30	3,18	134,01	30	30	4,67	91,16	30
40	0,30	1418, 1	20	40	1,74	243,93	20	40	3,21	132,73	20	40	4,70	90,54	20
50	0,33	1289, 1	10	50	1,77	239,78	10	50	3,24	131,47	10	50	4,73	89,94	10
2 0	0,36	1181, 7	178 0	10 0	1,80	235,77	170 0	18 0	3,27	130,23	162 0	26 0	4,76	89,35	154 0
10	0,39	1090,80	50	10	1,83	231,88	50	10	3,30	129,02	50	10	4,79	88,75	50
20	0,42	1012,80	40	20	1,86	228,12	40	20	3,33	127,82	40	20	4,82	88,17	40
30	0,45	945,30	30	30	1,90	224,47	30	30	3,36	126,65	30	30	4,86	87,60	30
40	0,48	886,20	20	40	1,93	220,95	20	40	3,39	125,50	20	40	4,89	87,03	20
50	0,51	834,05	10	50	1,96	217,52	10	50	3,42	124,37	10	50	4,92	86,58	10
3 0	0,54	787,70	177 0	11 0	1,99	214,22	169 0	19 0	3,45	123,26	161 0	27 0	4,95	85,92	153 0
10	0,57	746,22	50	10	2,02	211,00	50	10	3,48	122,17	50	10	4,98	85,37	50
20	0,60	708,89	40	20	2,05	207,87	40	20	3,51	121,09	40	20	5,02	84,83	40
30	0,63	675,11	30	30	2,08	204,84	30	30	3,55	120,04	30	30	5,05	84,30	30
40	0,66	544,40	20	40	2,11	201,90	20	40	3,58	119,00	20	40	5,08	83,77	20
50	0,69	616,37	10	50	2,14	199,03	10	50	3,61	117,98	10	50	5,11	83,25	10
4 0	0,72	590,68	176 0	12 0	2,17	196,25	168 0	20 0	3,64	116,98	160 0	28 0	5,14	82,74	152 0
10	0,75	567,02	50	10	2,20	193,54	50	10	3,67	115,99	50	10	5,17	82,22	50
20	0,78	545,19	40	20	2,23	190,90	40	20	3,70	115,02	40	20	5,21	81,71	40
30	0,81	524,98	30	30	2,26	188,34	30	30	3,73	114,07	30	30	5,24	81,12	30
40	0,84	506,21	20	40	2,29	185,84	20	40	3,76	113,13	20	40	5,27	80,73	20
50	0,87	488,74	10	50	2,32	183,40	10	50	3,79	112,20	10	50	5,30	80,24	10
5 0	0,90	472,44	175 0	13 0	2,35	181,04	167 0	21 0	3,82	111,29	159 0	29 0	5,33	79,76	151 0
10	0,93	457,57	50	10	2,38	178,72	50	10	3,85	110,39	50	10	5,36	79,28	50
20	0,96	442,86	40	20	2,41	176,37	40	20	3,88	109,51	40	20	5,40	78,81	40
30	0,99	429,42	30	30	2,44	174,27	30	30	3,92	108,64	30	30	5,43	78,34	30
40	1,02	416,77	20	40	2,47	172,12	20	40	3,95	107,79	20	40	5,46	77,89	20
50	1,05	404,84	10	50	2,50	170,03	10	50	3,98	106,94	10	50	5,49	77,43	10
6 0	1,08	393,58	174 0	14 0	2,53	167,99	166 0	22 0	4,01	106,11	158 0	30 0	5,53	76,98	150 0
10	1,11	382,92	50	10	2,56	165,99	50	10	4,04	105,30	50	10	5,56	76,53	50
20	1,14	372,83	40	20	2,60	164,04	40	20	4,07	104,49	40	20	5,59	76,09	40
30	1,17	363,24	30	30	2,63	162,14	30	30	4,11	103,70	30	30	5,62	75,66	30
40	1,20	354,14	20	40	2,66	160,27	20	40	4,14	102,91	20	40	5,66	75,23	20
50	1,23	345,49	10	50	2,69	158,45	10	50	4,17	102,14	10	50	5,69	74,70	10
7 0	1,26	337,24	173 0	15 0	2,72	156,68	165 0	23 0	4,20	101,38	157 0	31 0	5,72	74,38	149 0
10	1,29	329,38	50	10	2,75	154,93	50	10	4,23	100,63	50	10	5,75	73,96	50
20	1,32	321,87	40	20	2,78	153,23	40	20	4,26	99,89	40	20	5,78	73,55	40
30	1,35	314,70	30	30	2,81	151,56	30	30	4,29	99,17	30	30	5,82	73,14	30
40	1,38	307,84	20	40	2,84	149,93	20	40	4,32	98,44	20	40	5,85	72,73	20
50	1,41	301,27	10	50	2,87	148,33	10	50	4,35	97,74	10	50	5,88	72,33	10
8 0	1,44	294,98	172 0	16 0	2,90	146,77	164 0	24 0	4,38	97,04	156 0	32 0	5,91	71,93	148 0
	Cot.	Tang.	D M. Angle.		Cot.	Tang.	D. M. Angle.		Cot.	Tang.	D. M. Angle.		Cot.	Tang.	D. M. Angle.

TABLE III, Ire Partie. *Argument*, Angle à réduire.

Angle. D. M.	Tang	Cotang.		Angle. D. M.	Tang	Cotang.		Angle. D. M.	Tang	Cotang.		Angle. D. M.	Tang	Cotang.	
32 0	5"91	71"93	148 0	42 0	7"92	53"73	138 0	52 0	10,06	42,29	128 0	62 0	12"39	34"33	118 0
10	5,94	71,54	50	10	7,95	53,50	50	10	10,09	42,13	50	10	12,43	34,21	50
20	5,98	71,15	40	20	7,98	53,27	40	20	10,13	41,98	40	20	12,47	34,10	40
30	6,01	70,77	30	30	8,02	53,04	30	30	10,17	41,82	30	30	12,51	33,99	30
40	6,04	70,39	20	40	8,05	52,81	20	40	10,20	41,67	20	40	12,56	33,88	20
50	6,07	70,01	10	50	8,08	52,58	10	50	10,24	41,52	10	50	12,60	33,77	10
33 0	6,11	69,63	147 0	43 0	8,12	52,36	137 0	53 0	10,28	41,37	127 0	63 0	12,64	33,66	117 0
10	6,14	69,26	50	10	8,15	52,14	50	10	10,31	41,22	50	10	12,68	33,55	50
20	6,18	68,90	40	20	8,19	51,92	40	20	10,35	41,07	40	20	12,72	33,44	40
30	6,21	68,54	30	30	8,22	51,70	30	30	10,39	40,92	30	30	12,76	33,33	30
40	6,24	68,16	20	40	8,26	51,48	20	40	10,43	40,77	20	40	12,80	33,22	20
50	6,27	67,82	10	50	8,29	51,26	10	50	10,47	40,62	10	50	12,84	33,11	10
34 0	6,31	67,47	146 0	44 0	8,33	51,05	136 0	54 0	10,51	40,48	126 0	64 0	12,88	33,01	116 0
10	6,34	67,12	50	10	8,36	50,84	50	10	10,54	40,33	50	10	12,93	32,90	50
20	6,37	66,77	40	20	8,40	50,63	40	20	10,58	40,19	40	20	12,97	32,80	40
30	6,41	66,43	30	30	8,43	50,42	30	30	10,62	40,04	30	30	13,01	32,69	30
40	6,44	66,09	20	40	8,47	50,21	20	40	10,66	39,90	20	40	13,05	32,58	20
50	6,47	65,95	10	50	8,50	50,00	10	50	10,70	39,76	10	50	13,09	32,48	10
35 0	6,50	65,42	145 0	45 0	8,54	49,80	135 0	55 0	10,74	39,62	125 0	65 0	13,14	32,38	115 0
10	6,54	65,09	50	10	8,57	49,59	50	10	10,77	39,48	50	10	13,18	32,28	50
20	6,57	64,76	40	20	8,61	49,39	40	20	10,81	39,34	40	20	13,22	32,17	40
30	6,60	64,42	30	30	8,65	49,19	30	30	10,85	39,20	30	30	13,26	32,07	30
40	6,64	64,12	20	40	8,68	48,99	20	40	10,89	39,06	20	40	13,30	31,97	20
50	6,67	63,80	10	50	8,72	48,79	10	50	10,93	38,92	10	50	13,34	31,87	10
36 0	6,70	63,48	144 0	46 0	8,76	48,59	134 0	56 0	10,97	38,79	124 0	66 0	13,39	31,76	114 0
10	6,73	63,17	50	10	8,79	48,39	50	10	11,00	38,65	50	10	13,43	31,66	50
20	6,77	62,86	40	20	8,83	48,20	40	20	11,04	38,52	40	20	13,47	31,56	40
30	6,80	62,55	30	30	8,87	48,01	30	30	11,08	38,39	30	30	13,52	31,46	30
40	6,84	62,25	20	40	8,90	47,82	20	40	11,12	38,25	20	40	13,56	31,35	20
50	6,87	61,95	10	50	8,94	47,63	10	50	11,16	38,12	10	50	13,60	31,26	10
37 0	6,90	61,65	143 0	47 0	8,97	47,44	133 0	57 0	11,20	37,99	123 0	67 0	13,65	31,16	113 0
10	6,93	61,35	50	10	9,00	47,25	50	10	11,23	37,86	50	10	13,69	31,06	50
20	6,97	61,06	40	20	9,04	47,06	40	20	11,27	37,73	40	20	13,73	30,96	40
30	7,01	60,77	30	30	9,07	46,88	30	30	11,31	37,60	30	30	13,78	30,87	30
40	7,04	60,48	20	40	9,11	46,69	20	40	11,35	37,47	20	40	13,82	30,77	20
50	7,07	60,19	10	50	9,14	46,51	10	50	11,39	37,34	10	50	13,86	30,67	10
38 0	7,10	59,90	142 0	48 0	9,18	46,33	132 0	58 0	11,43	37,21	122 0	68 0	13,91	30,58	112 0
10	7,13	59,62	50	10	9,21	46,15	50	10	11,47	37,08	50	10	13,95	30,48	50
20	7,17	59,34	40	20	9,25	45,97	40	20	11,51	36,96	40	20	13,99	30,39	40
30	7,21	59,06	30	30	9,29	45,79	30	30	11,55	36,83	30	30	14,04	30,29	30
40	7,24	58,79	20	40	9,32	45,61	20	40	11,59	36,71	20	40	14,08	30,20	20
50	7,27	58,52	10	50	9,36	45,43	10	50	11,63	36,58	10	50	14,12	30,10	10
39 0	7,30	58,25	141 0	49 0	9,40	45,26	131 0	59 0	11,67	36,46	121 0	69 0	14,17	30,01	111 0
10	7,33	57,98	50	10	9,43	45,08	50	10	11,71	36,33	50	10	14,21	29,91	50
20	7,37	57,71	40	20	9,47	44,91	40	20	11,75	36,21	40	20	14,26	29,82	40
30	7,40	57,45	30	30	9,51	44,74	30	30	11,79	36,09	30	30	14,30	29,73	30
40	7,44	57,19	20	40	9,54	44,57	20	40	11,83	35,97	20	40	14,35	29,64	20
50	7,47	56,93	10	50	9,58	44,40	10	50	11,87	35,85	10	50	14,39	29,55	10
40 0	7,51	56,67	140 0	50 0	9,62	44,23	130 0	60 0	11,91	35,73	120 0	70 0	14,44	29,46	110 0
10	7,54	56,42	50	10	9,65	44,06	50	10	11,95	35,61	50	10	14,48	29,37	50
20	7,57	56,17	40	20	9,69	43,90	40	20	11,99	35,49	40	20	14,53	29,28	40
30	7,61	55,92	30	30	9,73	43,73	30	30	12,03	35,37	30	30	14,57	29,19	30
40	7,64	55,67	20	40	9,76	43,57	20	40	12,07	35,25	20	40	14,62	29,10	20
50	7,68	55,42	10	50	9,80	43,40	10	50	12,11	35,13	10	50	14,66	29,01	10
41 0	7,71	55,17	139 0	51 0	9,84	43,24	129 0	61 0	12,15	35,02	119 0	71 0	14,71	28,92	109 0
10	7,74	54,93	50	10	9,87	43,08	50	10	12,19	34,90	50	10	14,75	28,83	50
20	7,78	54,69	40	20	9,91	42,92	40	20	12,23	34,79	40	20	14,80	28,74	40
30	7,81	54,45	30	30	9,95	42,76	30	30	12,27	34,67	30	30	14,85	28,65	30
40	7,85	54,21	20	40	9,98	42,60	20	40	12,31	34,56	20	40	14,89	28,56	20
50	7,88	53,97	10	50	10,02	42,44	10	50	12,35	34,44	10	50	14,94	28,47	10
42 0	7,92	53,73	138 0	52 0	10,06	42,29	128 0	62 0	12,39	34,33	118 0	72 0	14,99	28,39	108 0
	Cot.	Tang.	D. M. Angle.		Cot.	Tang.	D. M. Angle.		Cot.	Tang.	D. M. Angle.		Cot.	Tang.	D. M. Angle.

TABLE III, Ire Partie. *Argument*, Angle à réduire.

Angle. D. M.	Tang	Cotang.		Angle. D. M.	Tang	Cotang.		Angle. D. M.	Tang	Cotang.		Angle. D. M.	Tang	Cotang.	
72 0	14"99	28"39	108 0	77 0	16"41	25,93	103 0	82 0	17"93	23"73	98 0	87 0	19"56	21"74	93 0
10	15,03	28,30	50	10	16,45	25,85	50	10	17,98	23,66	50	10	19,66	21,67	50
20	15,08	28,21	40	20	16,50	25,77	40	20	18,03	23,59	40	20	19,68	21,61	40
30	15,12	28,13	30	30	16,55	25,70	30	30	18,09	23,52	30	30	19,74	21,54	30
40	15,17	28,04	20	40	16,60	25,62	20	40	18,14	23,45	20	40	19,80	21,48	20
50	15,21	27,95	10	50	16,65	25,54	10	50	18,19	23,38	10	50	19,86	21,42	10
73 0	15,26	27,87	107 0	78 0	16,70	25,47	102 0	83 0	18,25	23,31	97 0	88 0	19,92	21,36	92 0
10	15,30	27,78	50	10	16,75	25,39	50	10	18,30	23,24	50	10	19,97	21,29	50
20	15,35	27,70	40	20	16,80	25,32	40	20	18,35	23,17	40	20	20,03	21,23	40
30	15,40	27,62	30	30	16,85	25,24	30	30	18,41	23,11	30	30	20,09	21,17	30
40	15,44	27,53	20	40	16,90	25,17	20	40	18,46	23,04	20	40	20,15	21,11	20
50	15,49	27,45	10	50	16,95	25,09	10	50	18,51	22,97	10	50	20,21	21,05	10
74 0	15,54	27,37	106 0	79 0	17,00	25,02	101 0	84 0	18,57	22,91	96 0	89 0	20,27	20,99	91 0
10	15,58	27,28	50	10	17,05	24,94	50	10	18,62	22,84	50	10	20,33	20,93	50
20	15,63	27,20	40	20	17,10	24,87	40	20	18,68	22,77	40	20	20,39	20,87	40
30	15,68	27,12	30	30	17,15	24,80	30	30	18,73	22,70	30	30	20,45	20,81	30
40	15,73	27,04	20	40	17,20	24,72	20	40	18,79	22,63	20	40	20,51	20,75	20
50	15,78	26,96	10	50	17,25	24,65	10	50	18,84	22,56	10	50	20,57	20,69	10
75 0	15,83	26,88	105 0	80 0	17,31	24,58	100 0	85 0	18,90	22,50	95 0	90 0	20,63	20,63	90 0
10	15,87	26,80	50	10	17,36	24,50	50	10	18,95	22,43	50		Cot.	Tang.	D. M. Angle.
20	15,92	26,72	40	20	17,41	24,43	40	20	19,01	22,37	40				
30	15,97	26,64	30	30	17,46	24,36	30	30	19,06	22,30	30				
40	16,01	26,56	20	40	17,51	24,29	20	40	19,12	22,24	20				
50	16,06	26,48	10	50	17,56	24,22	10	50	19,17	22,18	10				
76 0	16,11	26,40	104 0	81 0	17,62	24,15	99 0	86 0	19,23	22,12	94 0				
10	16,16	26,32	50	10	17,67	24,08	50	10	19,28	22,05	50				
20	16,21	26,24	40	20	17,72	24,01	40	20	19,34	21,99	40				
30	16,26	26,16	30	30	17,77	23,94	30	30	19,40	21,92	30				
40	16,31	26,08	20	40	17,82	23,87	20	40	19,45	21,86	20				
50	16,36	26,00	10	50	17,87	23,80	10	50	19,51	21,80	10				
77 0	16,41	25,93	103 0	82 0	17,93	23,73	98 0	87 0	19,56	21,74	93 0				
D. M. Angle.	Cot.	Tang.	D. M. Angle.		Cot.	Tang.	D. M. Angle.		Cot.	Tang.	D. M. Angle.				

Pour réduire à l'horizon, le nombre tangente est positif, et le nombre cotangente négatif. C'est le contraire pour passer de l'angle horizontal à l'angle des cordes.

TABLE III.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour réduire à l'horizon un angle observé dans un plan incliné, prenez dans cet Table un nombre avec l'argument $180° - (\delta + \delta')$, et puis un second nombre av l'argument $(\delta - \delta')$, (art. 129).

Pour réduire l'angle horizontal ou sphérique à l'angle des cordes, prenez dans même Table un premier nombre avec l'argument $(P + Q)$, et un second nomb avec l'argument $(P - Q)$, (art. 130.)

M.	0°	1°	2°	3°	4°	M.	0°	1°	2°	3°	4°
1	0,000	0,787	3,097	6,928	12,281	31	0,203	1,751	4,822	9,415	15,
2	0,001	0,813	3,148	7,005	12,383	32	0,217	1,790	4,886	9,504	15,
3	0,002	0,839	3,200	7,082	12,486	33	0,230	1,829	4,951	9,594	15,
4	0,003	0,866	3,252	7,160	12,589	34	0,244	1,869	5,016	9,684	15,
5	0,005	0,893	3,305	7,237	12,692	35	0,259	1,909	5,081	9,775	15,
6	0,007	0,921	3,358	7,316	12,796	36	0,274	1,949	5,147	9,866	16,
7	0,010	0,949	3,411	7,395	12,900	37	0,289	1,990	5,213	9,958	16,
8	0,013	0,978	3,465	7,475	13,005	38	0,305	2,031	5,280	10,050	16,
9	0,017	1,007	3,520	7,554	13,210	39	0,321	2,073	5,347	10,142	16,
10	0,021	1,036	3,575	7,634	13,215	40	0,338	2,115	5,414	10,235	16,
11	0,026	1,066	3,630	7,715	13,321	41	0,335	2,158	5,482	10,328	16,
12	0,030	1,096	3,685	7,796	13,428	42	0,373	2,200	5,550	10,422	16,
13	0,036	1,127	3,741	7,877	13,534	43	0,391	2,244	5,619	10,516	16,
14	0,041	1,158	3,798	7,959	13,641	44	0,409	2,288	5,688	10,610	17,
15	0,047	1,190	3,855	8,041	13,749	45	0,428	2,332	5,758	10,705	17,
16	0,054	1,222	3,912	8,124	13,857	46	0,446	2,376	5,828	10,800	17,
17	0,061	1,254	3,970	8,207	13,965	47	0,467	2,421	5,899	10,896	17,
18	0,068	1,287	4,028	8,291	14,074	48	0,487	2,467	5,970	10,992	17,
19	0,076	1,320	4,086	8,375	14,184	49	0,508	2,513	6,041	11,089	17,
20	0,084	1,354	4,145	8,459	14,293	50	0,529	2,559	6,112	11,186	17,
21	0,093	1,388	4,205	8,544	14,403	51	0,550	2,606	6,184	11,283	
22	0,102	1,422	4,265	8,629	14,514	52	0,572	2,653	6,257	11,381	
23	0,112	1,457	4,325	8,715	14,625	53	0,594	2,701	6,330	11,480	
24	0,122	1,492	4,386	8,801	14,736	54	0,617	2,749	6,403	11,578	
25	0,132	1,528	4,447	8,887	14,848	55	0,640	2,797	6,477	11,677	
26	0,143	1,564	4,508	8,974	14,960	56	0,663	2,846	6,551	11,777	18,
27	0,154	1,601	4,570	9,061	15,073	57	0,687	2,895	6,626	11,877	18,
28	0,166	1,638	4,633	9,149	15,186	58	0,711	2,945	6,701	11,977	18,
29	0,178	1,675	4,695	9,237	15,300	59	0,736	2,995	6,776	12,078	18,
30	0,190	1,713	4,759	9,326	15,413	60	0,761	3,046	6,852	12,179	19,

TABLE IV.

PREMIÈRE PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique d'un triangle sur 200 Grades.

Argumens. *Côté et angle adjacent.*

G.	G.	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000	14000	15000
0	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	99	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03
2	98	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,04	0,04	0,05	0,06
3	97	0,02	0,02	0,03	0,04	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
4	96	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,11
5	95	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,09	0,10	0,12	0,14
6	94	0,04	0,05	0,06	0,07	0,09	0,10	0,12	0,14	0,17
7	93	0,04	0,05	0,07	0,09	0,10	0,12	0,14	0,17	0,19
8	92	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,17	0,19	0,22
9	91	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,16	0,19	0,21	0,25
10	90	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15	0,17	0,21	0,24	0,27
11	89	0,06	0,08	0,11	0,13	0,16	0,19	0,22	0,26	0,30
12	88	0,07	0,09	0,12	0,14	0,17	0,21	0,24	0,28	0,33
13	87	0,08	0,10	0,13	0,16	0,19	0,22	0,26	0,31	0,35
14	86	0,08	0,11	0,13	0,17	0,20	0,24	0,28	0,33	0,38
15	85	0,09	0,11	0,14	0,18	0,22	0,26	0,30	0,35	0,40
16	84	0,09	0,12	0,15	0,19	0,23	0,27	0,32	0,37	0,43
17	83	0,10	0,13	0,16	0,20	0,24	0,29	0,34	0,39	0,45
18	82	0,10	0,13	0,17	0,21	0,25	0,30	0,36	0,41	0,47
19	81	0,11	0,14	0,18	0,22	0,27	0,32	0,37	0,43	0,50
20	80	0,11	0,15	0,19	0,23	0,28	0,33	0,39	0,45	0,52
21	79	0,12	0,15	0,19	0,24	0,29	0,35	0,41	0,47	0,54
22	78	0,12	0,16	0,20	0,25	0,30	0,36	0,43	0,49	0,56
23	77	0,13	0,17	0,21	0,26	0,32	0,38	0,45	0,52	0,58
24	76	0,13	0,17	0,22	0,27	0,33	0,39	0,46	0,53	0,60
25	75	0,14	0,18	0,22	0,28	0,34	0,40	0,47	0,54	0,62
26	74	0,14	0,18	0,23	0,29	0,35	0,41	0,48	0,56	0,64
27	73	0,14	0,19	0,24	0,29	0,36	0,42	0,50	0,58	0,66
28	72	0,15	0,19	0,24	0,30	0,37	0,44	0,51	0,59	0,68
29	71	0,15	0,20	0,25	0,31	0,38	0,45	0,52	0,61	0,70
30	70	0,16	0,20	0,26	0,32	0,38	0,46	0,54	0,62	0,71
31	69	0,16	0,21	0,26	0,32	0,39	0,47	0,55	0,64	0,73
32	68	0,16	0,21	0,27	0,33	0,40	0,48	0,56	0,65	0,75
33	67	0,17	0,22	0,27	0,34	0,41	0,49	0,57	0,66	0,76
34	66	0,17	0,22	0,28	0,34	0,42	0,50	0,58	0,67	0,77
35	65	0,17	0,22	0,28	0,35	0,42	0,50	0,59	0,69	0,79
36	64	0,17	0,23	0,29	0,36	0,43	0,51	0,60	0,70	0,80
37	63	0,18	0,23	0,29	0,36	0,44	0,52	0,61	0,71	0,81
38	62	0,18	0,23	0,30	0,36	0,44	0,53	0,62	0,72	0,82
39	61	0,18	0,24	0,30	0,37	0,45	0,53	0,62	0,72	0,83
40	60	0,18	0,24	0,30	0,37	0,45	0,54	0,63	0,73	0,84
41	59	0,18	0,24	0,30	0,38	0,46	0,54	0,63	0,74	0,85
42	58	0,19	0,24	0,31	0,38	0,46	0,55	0,64	0,75	0,86
43	57	0,19	0,25	0,31	0,38	0,46	0,55	0,65	0,75	0,86
44	56	0,19	0,25	0,31	0,39	0,47	0,56	0,65	0,76	0,87
45	55	0,19	0,25	0,31	0,39	0,47	0,56	0,66	0,76	0,87
46	54	0,19	0,25	0,32	0,39	0,47	0,56	0,66	0,76	0,88
47	53	0,19	0,25	0,32	0,39	0,47	0,56	0,66	0,77	0,88
48	52	0,19	0,25	0,32	0,39	0,47	0,56	0,66	0,77	0,88
49	51	0,19	0,25	0,32	0,39	0,47	0,57	0,66	0,77	0,88
50	50	0,19	0,25	0,32	0,39	0,48	0,57	0,66	0,77	0,88

SUITE DE LA TABLE IV.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique d'un triangle sur 200 Grades.

Argumens. *Côté et angle adjacent.*

G.	G.	16000	17000	18000	19000	20000	21000	22000	23000	
0	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
1	99	0,03	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,06	0,07	
2	98	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,10	0,12	0,13	
3	97	0,09	0,11	0,12	0,13	0,15	0,16	0,18	0,20	
4	96	0,13	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	
5	95	0,16	0,18	0,20	0,22	0,25	0,27	0,30	0,32	
6	94	0,19	0,21	0,24	0,27	0,29	0,32	0,36	0,39	
7	93	0,22	0,25	0,28	0,31	0,34	0,38	0,41	0,45	
8	92	0,25	0,28	0,32	0,35	0,39	0,43	0,47	0,52	
9	91	0,28	0,32	0,35	0,40	0,44	0,48	0,53	0,58	
10	90	0,31	0,35	0,39	0,44	0,49	0,54	0,59	0,64	
11	89	0,34	0,38	0,43	0,48	0,53	0,59	0,64	0,70	
12	88	0,37	0,42	0,47	0,52	0,58	0,64	0,70	0,76	
13	87	0,40	0,45	0,51	0,56	0,62	0,69	0,75	0,83	
14	86	0,43	0,48	0,54	0,60	0,67	0,74	0,81	0,88	
15	85	0,46	0,52	0,58	0,64	0,71	0,79	0,86	0,94	
16	84	0,48	0,55	0,61	0,68	0,76	0,83	0,91	1,00	
17	83	0,51	0,58	0,65	0,72	0,80	0,88	0,97	1,06	
18	82	0,54	0,61	0,68	0,76	0,84	0,93	1,02	1,11	
19	81	0,57	0,64	0,72	0,80	0,88	0,97	1,07	1,17	
20	80	0,59	0,67	0,75	0,83	0,92	1,02	1,12	1,22	
21	79	0,62	0,70	0,78	0,87	0,96	1,06	1,17	1,27	
22	78	0,64	0,72	0,81	0,90	1,00	1,10	1,21	1,32	
23	77	0,66	0,75	0,84	0,93	1,04	1,15	1,26	1,37	
24	76	0,69	0,78	0,87	0,97	1,07	1,19	1,30	1,42	
25	75	0,71	0,80	0,90	1,00	1,11	1,22	1,34	1,47	
26	74	0,73	0,83	0,93	1,03	1,14	1,26	1,39	1,51	
27	73	0,75	0,85	0,95	1,06	1,17	1,30	1,43	1,56	
28	72	0,77	0,87	0,98	1,09	1,20	1,33	1,46	1,60	
29	71	0,79	0,90	1,01	1,12	1,24	1,37	1,50	1,64	
30	70	0,81	0,92	1,03	1,15	1,27	1,40	1,54	1,68	
31	69	0,83	0,94	1,05	1,17	1,30	1,43	1,57	1,72	
32	68	0,85	0,96	1,07	1,20	1,33	1,46	1,60	1,75	
33	67	0,87	0,98	1,09	1,22	1,35	1,49	1,64	1,79	
34	66	0,88	1,00	1,11	1,24	1,38	1,52	1,67	1,82	
35	65	0,90	1,01	1,13	1,26	1,40	1,54	1,70	1,85	
36	64	0,91	1,03	1,15	1,28	1,42	1,57	1,72	1,88	
37	63	0,92	1,04	1,17	1,30	1,44	1,59	1,74	1,91	
38	62	0,93	1,06	1,18	1,32	1,46	1,61	1,77	1,93	
39	61	0,95	1,07	1,20	1,33	1,48	1,63	1,79	1,96	
40	60	0,96	1,08	1,21	1,35	1,49	1,65	1,81	1,98	
41	59	0,96	1,09	1,22	1,36	1,51	1,66	1,83	2,00	
42	58	0,97	1,10	1,23	1,37	1,52	1,68	1,84	2,01	
43	57	0,98	1,11	1,24	1,38	1,53	1,69	1,86	2,03	
44	56	0,99	1,11	1,25	1,39	1,54	1,70	1,87	2,04	
45	55	0,99	1,12	1,26	1,40	1,55	1,71	1,88	2,05	
46	54	1,00	1,13	1,26	1,41	1,56	1,72	1,89	2,06	
47	53	1,00	1,13	1,27	1,41	1,56	1,72	1,89	2,07	
48	52	1,00	1,13	1,27	1,41	1,57	1,73	1,90	2,07	
49	51	1,00	1,13	1,27	1,42	1,57	1,73	1,90	2,08	
50	50	1,01	1,13	1,27	1,42	1,57	1,73	1,90	2,08	

SUITE DE LA TABLE IV.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique d'un triangle sur 200 Grades.

Argumens : *Côté et angle adjacent.*

G.	G.	25000	26000	27000	28000	29000	30000	31000	32000	33000
0	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	99	0,08	0,08	0,09	0,10	0,10	0,11	0,12	0,13	0,13
2	98	0,15	0,17	0,18	0,19	0,21	0,22	0,24	0,25	0,26
3	97	0,23	0,25	0,27	0,29	0,31	0,33	0,36	0,38	0,40
4	96	0,31	0,33	0,36	0,39	0,41	0,44	0,47	0,50	0,54
5	95	0,38	0,42	0,45	0,48	0,52	0,55	0,59	0,63	0,67
6	94	0,46	0,50	0,54	0,58	0,62	0,66	0,71	0,76	0,80
7	93	0,54	0,58	0,62	0,67	0,72	0,77	0,82	0,88	0,93
8	92	0,61	0,66	0,71	0,77	0,82	0,88	0,94	1,00	1,06
9	91	0,68	0,74	0,80	0,86	0,92	0,99	1,05	1,12	1,19
10	90	0,76	0,82	0,88	0,95	1,02	1,09	1,17	1,24	1,32
11	89	0,83	0,90	0,97	1,04	1,12	1,20	1,28	1,36	1,45
12	88	0,90	0,98	1,05	1,13	1,22	1,30	1,39	1,48	1,57
13	87	0,97	1,05	1,14	1,22	1,31	1,40	1,50	1,60	1,70
14	86	1,04	1,13	1,22	1,31	1,41	1,50	1,61	1,71	1,82
15	85	1,11	1,21	1,30	1,40	1,50	1,60	1,71	1,83	1,94
16	84	1,18	1,28	1,38	1,48	1,59	1,70	1,82	1,94	2,06
17	83	1,25	1,35	1,46	1,57	1,68	1,80	1,92	2,05	2,17
18	82	1,32	1,42	1,53	1,65	1,77	1,89	2,02	2,15	2,29
19	81	1,38	1,49	1,61	1,73	1,86	1,99	2,12	2,26	2,40
20	80	1,44	1,56	1,68	1,81	1,94	2,08	2,22	2,36	2,51
21	79	1,50	1,63	1,75	1,89	2,02	2,17	2,31	2,46	2,62
22	78	1,56	1,69	1,82	1,97	2,10	2,25	2,41	2,56	2,73
23	77	1,62	1,76	1,89	1,04	2,18	2,34	2,50	2,66	2,83
24	76	1,68	1,82	1,96	1,11	2,26	2,43	2,58	2,75	2,93
25	75	1,73	1,88	2,02	1,18	2,34	2,50	2,67	2,84	3,02
26	74	1,79	1,93	2,08	2,24	2,41	2,58	2,75	2,93	3,12
27	73	1,84	1,99	2,15	2,31	2,48	2,65	2,83	3,02	3,21
28	72	1,89	2,05	2,21	2,37	2,55	2,72	2,91	3,10	3,30
29	71	1,94	2,10	2,26	2,43	2,61	2,79	2,98	3,18	3,38
30	70	1,99	2,15	2,32	2,49	2,67	2,86	3,05	3,25	3,46
31	69	2,03	2,20	2,37	2,55	2,73	2,92	3,12	3,38	3,54
32	68	2,07	2,24	2,42	2,60	2,79	2,98	3,19	3,40	3,61
33	67	2,11	2,28	2,46	2,65	2,84	3,04	3,25	3,46	3,68
34	66	2,15	2,33	2,51	2,70	2,89	3,10	3,31	3,52	3,75
35	65	2,18	2,37	2,55	2,74	2,94	3,15	3,36	3,58	3,81
36	64	2,22	2,40	2,59	2,79	2,99	3,20	3,41	3,64	3,87
37	63	2,25	2,44	2,63	2,83	3,03	3,24	3,46	3,69	3,93
38	62	2,28	2,47	2,66	2,86	3,07	3,29	3,51	3,74	3,98
39	61	2,31	2,50	2,69	2,90	3,11	3,33	3,55	3,78	4,02
40	60	2,33	2,52	2,72	2,93	3,14	3,36	3,59	3,82	4,07
41	59	2,36	2,55	2,75	2,96	3,17	3,39	3,62	3,86	4,11
42	58	2,38	2,57	2,77	2,98	3,20	3,42	3,65	3,89	4,14
43	57	2,39	2,59	2,79	3,00	3,22	3,45	3,68	3,92	4,17
44	56	2,41	2,61	2,81	3,02	3,24	3,47	3,71	3,95	4,20
45	55	2,42	2,62	2,83	3,04	3,26	3,49	3,73	3,97	4,22
46	54	2,43	2,63	2,84	3,05	3,28	3,51	3,74	3,99	4,24
47	53	2,44	2,64	2,85	3,06	3,29	3,52	3,76	4,00	4,26
48	52	2,45	2,65	2,86	3,07	3,30	3,53	3,77	4,01	4,27
49	51	2,45	2,65	2,86	3,07	3,30	3,53	3,77	4,02	4,27
50	50	2,45	2,65	2,86	3,07	3,30	3,53	3,77	4,02	4,28

SUITE DE LA TABLE IV.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique d'un triangle sur 200 Grades.

Argumens : *Côté et angle adjacent.*

G.	G.	34000	35000	36000	37000	38000	39000	40000	41000	42000
0	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	99	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22
2	98	0,29	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,39	0,41	0,43
3	97	0,43	0,45	0,48	0,51	0,53	0,56	0,59	0,62	0,65
4	96	0,57	0,60	0,64	0,67	0,71	0,75	0,79	0,83	0,87
5	95	0,71	0,75	0,80	0,84	0,89	0,89	0,98	1,03	1,08
6	94	0,85	0,90	0,95	1,01	1,06	1,12	1,18	1,24	1,30
7	93	0,99	1,05	1,11	1,17	1,24	1,30	1,37	1,44	1,51
8	92	1,13	1,20	1,27	1,34	1,41	1,49	1,56	1,64	1,72
9	91	1,27	1,34	1,42	1,50	1,58	1,67	1,75	1,84	1,93
10	90	1,40	1,49	1,57	1,66	1,75	1,85	1,94	2,04	2,14
11	89	1,54	1,63	1,72	1,82	1,92	2,02	2,13	2,24	2,35
12	88	1,67	1,77	1,87	1,98	2,09	2,20	2,32	2,43	2,55
13	87	1,80	1,91	2,02	2,14	2,25	2,37	2,50	2,62	2,75
14	86	1,93	2,05	2,17	2,29	2,41	2,54	2,68	2,81	2,95
15	85	2,06	2,18	2,31	2,44	2,57	2,71	2,85	3,00	3,14
16	84	2,19	2,32	2,45	2,59	2,73	2,88	3,03	3,18	3,33
17	83	2,31	2,45	2,59	2,74	2,89	3,04	3,20	3,36	3,52
18	82	2,43	2,58	2,73	2,88	3,04	3,20	3,37	3,54	3,71
19	81	2,55	2,70	2,86	3,02	3,19	3,36	3,53	3,71	3,89
20	80	2,67	2,83	2,99	3,16	3,33	3,51	3,69	3,88	4,07
21	79	2,78	2,95	3,12	3,30	3,48	3,66	3,85	4,05	4,25
22	78	2,89	3,07	3,24	3,43	3,61	3,81	4,01	4,21	4,41
23	77	3,00	3,18	3,36	3,55	3,74	3,96	4,15	4,37	4,58
24	76	3,11	3,29	3,48	3,68	3,88	4,13	4,30	4,52	4,74
25	75	3,21	3,40	3,60	3,80	4,01	4,22	4,44	4,67	4,89
26	74	3,31	3,51	3,71	3,92	4,13	4,35	4,58	4,80	[illegible]
27	73	3,40	3,61	3,82	4,03	4,25	4,88	4,71	4,95	[illegible]
28	72	3,50	3,71	3,92	4,14	4,37	4,60	4,84	5,09	[illegible]
29	71	3,59	3,80	4,02	4,25	4,48	4,72	4,96	5,22	[illegible]
30	70	3,67	3,89	4,12	4,35	4,59	4,83	5,08	5,34	[illegible]
31	69	3,75	3,98	4,21	4,45	4,69	4,94	5,20	5,46	[illegible]
32	68	3,83	4,06	4,30	4,54	4,79	5,04	5,31	5,57	[illegible]
33	67	2,91	4,14	4,38	4,63	4,88	5,15	5,41	5,68	[illegible]
34	66	3,98	4,22	4,46	4,71	4,97	5,23	5,51	5,78	[illegible]
35	65	4,04	4,29	4,54	4,79	5,05	5,32	5,60	5,88	[illegible]
36	64	4,11	4,35	4,61	4,86	5,13	5,40	5,69	5,97	[illegible]
37	63	4,17	4,41	4,67	4,93	5,20	5,48	5,77	6,06	[illegible]
38	62	4,22	4,47	4,73	5,00	5,27	5,55	5,84	6,14	[illegible]
39	61	4,27	4,53	4,79	5,06	5,33	5,62	5,91	6,21	[illegible]
40	60	4,32	4,58	4,84	5,11	5,38	5,68	5,98	6,28	[illegible]
41	59	4,36	4,62	4,89	5,16	5,44	5,74	6,03	6,34	[illegible]
42	58	4,40	4,66	4,93	5,21	5,49	5,79	6,09	6,39	[illegible]
43	57	4,44	4,70	4,97	5,25	5,53	5,83	6,13	6,44	[illegible]
44	56	4,46	4,72	5,00	5,28	5,57	5,88	6,17	6,48	[illegible]
45	55	4,48	4,75	5,03	5,31	5,60	5,90	6,21	6,52	[illegible]
46	54	4,50	4,77	5,05	5,33	5,63	5,93	6,23	6,55	[illegible]
47	53	4,52	4,79	5,07	5,35	5,65	5,95	6,26	6,57	[illegible]
48	52	4,53	4,80	5,08	5,36	5,66	5,96	6,27	6,59	[illegible]
49	51	4,54	4,81	5,09	5,37	5,67	5,97	6,28	6,60	[illegible]
50	50	4,54	4,81	5,09	5,38	5,67	5,97	6,28	6,60	[illegible]

SUITE DE LA TABLE IV.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique d'un triangle sur 200 Grades.

Argumens : *Côté et angle adjacent.*

G.	G.	43000	44000	45000	46000	47000	48000	49000	50000	51000
0	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	99	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,30	0,31	0,32
2	98	0,46	0,48	0,50	0,52	0,54	0,57	0,60	0,62	0,64
3	97	0,68	0,72	0,75	0,78	0,82	0,85	0,89	0,92	0,96
4	96	0,91	0,95	1,00	1,04	1,09	1,13	1,18	1,23	1,28
5	95	1,14	1,19	1,25	1,30	1,36	1,42	1,47	1,54	1,60
6	94	1,36	1,42	1,49	1,56	1,62	1,70	1,77	1,84	1,91
7	93	1,58	1,66	1,74	1,81	1,89	1,97	2,06	2,14	2,23
8	92	1,89	1,89	1,98	2,07	2,16	1,25	2,34	2,44	2,54
9	91	2,03	2,12	2,22	2,32	2,42	2,52	2,63	2,74	2,85
10	90	2,24	2,35	2,46	2,57	2,68	2,80	2,91	3,03	3,16
11	89	2,45	2,56	2,69	2,81	2,94	3,06	3,19	3,32	3,46
12	88	2,67	2,80	2,93	3,06	3,19	3,33	3,47	3,61	3,76
13	87	2,88	3,02	3,16	3,30	3,45	3,59	3,74	3,90	4,06
14	86	3,09	3,24	3,39	3,54	3,69	3,85	4,01	4,18	4,35
15	85	3,30	3,45	3,61	3,77	3,94	4,11	4,28	4,46	4,64
16	84	3,50	3,66	3,83	4,00	4,18	4,36	4,54	4,73	4,90
17	83	3,70	3,87	4,05	4,23	4,41	4,61	4,80	5,00	5,20
18	82	3,89	4,07	4,26	4,45	4,65	4,85	5,05	5,26	5,47
19	81	4,08	4,27	4,47	4,67	4,88	5,09	5,30	5,52	5,74
20	80	4,27	4,47	4,67	4,88	5,10	5,32	5,54	5,77	6,00
21	79	4,45	4,66	4,87	5,09	5,32	5,55	5,78	6,02	6,26
22	78	4,65	4,85	5,07	5,30	5,62	5,77	6,01	6,26	6,51
23	77	4,96	5,14	5,37	5,50	5,87	5,98	6,23	6,49	6,75
24	76	4,97	5,20	5,44	5,69	5,94	6,19	6,45	6,72	6,99
25	75	5,13	5,38	5,62	5,88	6,13	6,40	6,67	6,94	7,22
26	74	5,29	5,54	5,80	6,06	6,32	6,60	6,87	7,16	7,45
27	73	5,45	5,70	5,96	6,23	6,51	6,79	7,07	7,26	7,66
28	72	5,60	5,86	6,13	6,40	6,68	6,07	7,26	7,36	7,77
29	71	5,74	6,01	6,28	6,57	6,85	7,15	7,45	7,76	8,07
30	70	5,87	6,15	6,43	6,72	7,02	7,32	7,63	7,94	8,26
31	69	6,01	6,29	6,58	6,87	7,18	7,48	7,80	8,12	8,45
32	68	6,13	6,42	6,71	7,02	7,32	7,64	7,96	8,29	8,62
33	67	6,25	6,54	6,84	7,15	7,47	7,78	8,13	8,45	8,79
34	66	6,36	6,68	6,97	7,28	7,60	7,93	8,27	8,60	8,95
35	65	6,47	6,77	7,09	7,40	7,73	8,06	8,40	8,75	9,10
36	64	6,57	6,88	7,20	7,52	7,85	8,19	8,53	8,88	9,24
37	63	6,66	6,98	7,30	7,63	7,96	8,30	8,65	9,01	9,37
38	62	6,75	7,07	7,39	7,73	8,07	8,41	8,77	9,13	9,50
39	61	6,83	7,15	7,48	7,82	8,16	8,51	8,87	9,24	9,61
40	60	6,89	7,23	7,56	7,90	8,25	8,60	8,97	9,34	9,71
41	59	6,97	7,30	7,64	7,98	8,33	8,69	9,05	9,43	9,81
42	58	7,03	7,36	7,70	8,05	8,40	8,76	9,13	9,51	9,89
43	57	7,09	7,42	7,76	8,11	8,46	8,83	9,20	9,58	9,97
44	56	7,13	7,46	7,81	8,16	8,52	8,89	9,26	9,64	10,03
45	55	7,17	7,51	7,85	8,21	8,57	8,94	9,31	9,70	10,09
46	54	7,20	7,54	7,89	8,24	8,61	8,98	9,35	9,74	10,13
47	53	7,23	7,57	7,92	8,27	8,64	9,01	9,38	9,77	10,16
48	52	7,25	7,59	7,94	8,29	8,66	9,03	9,41	9,80	10,19
49	51	7,26	7,60	7,95	8,31	8,67	9,04	9,42	9,81	10,21
50	50	7,26	7,60	7,95	8,31	8,67	9,05	9,43	9,82	10,21

SUITE DE LA TABLE IV.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique d'un triangle sur 200 Grades.

Argumens : *Côté et angle adjacent.*

G.	G.	52000	53000	54000	55000	56000	57000	58000	59000	60000
0	100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	99	0,34	0,34	0,36	0,37	0,39	0,40	0,42	0,43	0,44
2	98	0,67	0,69	0,72	0,75	0,77	0,80	0,83	0,88	0,89
3	97	1,00	1,04	1,08	1,12	1,16	1,20	1,24	1,29	1,33
4	96	1,33	1,35	1,44	1,49	1,54	1,60	1,66	1,71	1,77
5	95	1,66	1,73	1,79	1,86	1,93	2,00	2,07	2,14	2,21
6	94	1,99	2,07	2,15	2,23	2,31	2,39	2,48	2,56	2,65
7	93	2,32	2,41	2,50	2,59	2,69	2,78	2,88	2,98	3,08
8	92	2,64	2,74	2,85	2,95	3,06	3,17	3,28	3,40	3,52
9	91	2,96	3,08	3,19	3,31	3,44	3,56	3,69	3,81	3,94
10	90	3,28	3,41	3,54	3,67	3,81	3,94	4,08	4,22	4,37
11	89	3,60	3,74	3,88	4,02	4,17	4,32	4,47	4,63	4,79
12	88	3,91	4,06	4,22	4,37	4,53	4,70	4,86	5,03	5,20
13	87	4,22	4,38	4,55	4,72	4,89	5,07	5,25	5,43	5,61
14	86	4,52	4,70	4,88	5,06	5,22	5,43	5,62	5,82	6,02
15	85	4,82	5,01	5,20	5,39	5,59	5,79	6,00	6,21	6,42
16	84	5,12	5,31	5,52	5,72	5,93	6,15	6,36	6,59	6,81
17	83	5,41	5,61	5,83	6,05	6,27	6,50	6,72	6,96	7,20
18	82	5,69	5,91	6,14	6,36	6,60	6,84	7,08	7,33	7,58
19	81	5,97	6,19	6,44	6,68	6,92	7,17	7,42	7,68	7,95
20	80	6,24	6,48	6,73	6,98	7,24	7,50	7,76	8,04	8,31
21	79	6,51	6,61	7,02	7,28	7,55	7,82	8,10	8,38	8,66
22	78	6,77	6,87	7,30	7,57	7,85	8,13	8,42	8,71	9,01
23	77	7,02	7,29	7,57	7,86	8,14	8,44	8,74	9,04	9,35
24	76	7,27	7,55	7,84	8,13	8,43	8,73	9,04	9,36	9,68
25	75	7,51	7,80	8,10	8,40	8,71	9,02	9,34	9,67	10,00
26	74	7,74	8,04	8,35	8,66	8,98	9,30	9,63	9,96	10,31
27	73	7,97	8,27	8,59	8,91	9,24	9,57	9,91	10,25	10,60
28	72	8,18	8,50	8,82	9,15	9,49	9,83	10,18	10,53	10,89
29	71	8,39	8,72	9,05	9,37	9,73	10,08	10,44	10,80	11,17
30	70	8,59	8,92	9,26	9,61	9,96	10,32	10,69	11,06	11,44
31	69	8,78	9,12	9,47	9,82	10,19	10,55	10,93	11,31	11,69
32	68	8,97	9,31	9,67	10,03	10,40	10,77	11,15	11,54	11,94
33	67	9,14	9,50	9,86	10,22	10,60	10,98	11,37	11,77	12,17
34	66	9,31	9,67	10,03	10,41	10,79	11,18	11,57	11,98	12,39
35	65	9,46	9,83	10,20	10,58	10,97	11,37	11,77	12,18	12,59
36	64	9,61	9,98	10,36	10,75	11,12	11,54	11,95	12,37	12,79
37	63	9,75	10,12	10,51	10,90	11,30	11,71	12,12	12,55	12,98
38	62	9,87	10,26	10,65	11,04	11,45	11,86	12,28	12,71	13,14
39	61	10,00	10,38	10,77	11,18	11,59	12,00	12,43	12,86	13,30
40	60	10,10	10,49	10,89	11,30	11,71	12,13	12,56	13,00	13,44
41	59	10,20	10,59	11,00	11,41	11,83	12,25	12,68	13,13	13,58
42	58	10,28	10,68	11,10	11,51	11,93	12,36	12,79	13,24	13,69
43	57	10,35	10,77	11,18	11,59	12,02	12,45	12,89	13,34	13,80
44	56	10,44	10,84	11,25	11,67	12,10	12,53	12,97	13,43	13,88
45	55	10,48	10,89	11,31	11,71	12,16	12,60	13,05	13,50	13,96
46	54	10,53	10,94	11,36	11,79	12,22	12,66	13,11	13,56	14,03
47	53	10,57	10,98	11,40	11,83	12,26	12,70	13,15	13,61	14,08
48	52	10,59	11,01	11,43	11,85	12,29	12,73	13,18	13,65	14,11
49	51	10,61	11,03	11,45	11,87	12,31	12,75	13,20	13,66	14,13
50	50	10,62	11,03	11,45	11,88	12,31	12,76	13,21	13,67	14,14

TABLE V.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour trouver l'excès sphérique exprimé en secondes centésimales.

Argumens : *Base et hauteur des triangles.*

BASE.	HAUTEUR.									
	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
1000	0"007	0"015	0"023	0"031	0"039	0"047	0"054	0"062	0"070	0"078
2000	0,015	0,034	0,047	0,062	0,078	0,094	0,109	0,125	0,141	0,157
3000	0,023	0,047	0,070	0,094	0,117	0,141	0,164	0,188	0,212	0,235
4000	0,031	0,062	0,094	0,125	0,157	0,188	0,219	0,251	0,282	0,314
5000	0,039	0,078	0,117	0,157	0,196	0,235	0,274	0,314	0,353	0,392
6000	0,047	0,094	0,141	0,188	0,235	0,282	0,329	0,376	0,423	0,471
7000	0,054	0,109	0,164	0,219	0,274	0,329	0,383	0,437	0,491	0,545
8000	0,062	0,125	0,188	0,251	0,314	0,376	0,438	0,500	0,562	0,624
9000	0,070	0,141	0,212	0,282	0,353	0,423	0,493	0,563	0,633	0,706
10000	0,078	0,157	0,235	0,314	0,392	0,471	0,549	0,628	0,706	0,785
11000	0,086	0,173	0,259	0,345	0,431	0,518	0,604	0,691	0,777	0,863
12000	0,094	0,188	0,282	0,376	0,471	0,565	0,659	0,753	0,848	0,942
13000	0,102	0,204	0,306	0,408	0,510	0,612	0,714	0,816	0,918	1,020
14000	0,109	0,219	0,329	0,439	0,549	0,659	0,769	0,879	0,989	1,099
15000	0,117	0,235	0,353	0,471	0,589	0,706	0,824	0,942	1,060	1,178
16000	0,125	0,251	0,376	0,502	0,627	0,753	0,878	0,004	1,130	1,256
17000	0,133	0,267	0,400	0,534	0,667	0,801	0,934	0,068	1,201	1,335
18000	0,141	0,282	0,424	0,565	0,707	0,848	0,989	0,131	1,272	1,414
19000	0,149	0,298	0,447	0,596	0,746	0,895	1,044	0,193	1,342	1,492
20000	0,157	0,314	0,471	0,628	0,785	0,942	1,099	0,256	1,413	1,570
21000	0,164	0,329	0,494	0,659	0,824	0,989	1,154	1,319	1,484	1,649
22000	0,172	0,345	0,518	0,691	0,863	1,036	1,209	1,382	1,554	1,727
23000	0,180	0,361	0,541	0,722	0,903	1,083	1,264	1,444	1,625	1,806
24000	0,188	0,376	0,565	0,753	0,942	1,130	1,319	1,507	1,696	1,884
25000	0,196	0,392	0,588	0,785	0,981	1,177	1,374	1,570	1,766	1,963
26000	0,204	0,408	0,612	0,816	1,020	1,224	1,429	1,633	1,838	2,042
27000	0,212	0,424	0,636	0,848	1,060	1,272	1,484	1,696	1,908	2,120
28000	0,220	0,439	0,659	0,879	1,099	1,319	1,539	1,759	1,979	2,199
29000	0,227	0,455	0,683	0,911	1,138	1,366	1,594	1,821	2,049	2,277
30000	0,235	0,471	0,706	0,942	1,178	1,413	1,649	1,884	2,120	2,356
31000	0,243	0,486	0,730	0,973	1,217	1,460	1,704	1,947	2,191	2,434
32000	0,251	0,502	0,753	1,005	1,256	1,507	1,759	2,010	2,261	2,513
33000	0,259	0,518	0,777	1,036	1,295	1,555	1,814	2,073	2,332	2,591
34000	0,267	0,534	0,801	1,068	1,335	1,602	1,869	2,136	2,403	2,670
35000	0,274	0,549	0,824	1,099	1,374	1,649	1,924	2,199	2,474	2,749
36000	0,282	0,565	0,848	1,130	1,413	1,696	1,979	2,261	2,544	2,827
37000	0,290	0,581	0,871	1,162	1,452	1,743	2,033	2,324	2,615	2,905
38000	0,298	0,596	0,895	1,193	1,492	1,790	2,088	2,387	2,685	2,984
39000	0,306	0,612	0,918	1,225	1,531	1,837	2,144	2,450	2,756	3,063
40000	0,314	0,628	0,942	1,256	1,570	1,884	2,199	2,513	2,827	3,141
41000	0,322	0,644	0,966	1,288	1,610	1,932	2,254	2,576	2,898	3,220
42000	0,329	0,659	0,989	1,319	1,649	1,979	2,309	2,639	2,968	3,298
43000	0,337	0,675	1,013	1,350	1,688	2,026	2,364	2,701	3,039	3,377
44000	0,345	0,691	1,036	1,382	1,727	2,073	2,419	2,764	3,110	3,456
45000	0,353	0,707	1,060	1,413	1,767	2,120	2,474	2,827	3,180	3,534
46000	0,361	0,722	1,083	1,445	1,806	2,167	2,528	2,890	3,251	3,612
47000	0,369	0,738	1,107	1,476	1,845	2,214	2,583	2,952	3,322	3,691
48000	0,377	0,753	1,130	1,507	1,884	2,261	2,638	3,015	3,392	3,769
49000	0,384	0,769	1,154	1,539	1,924	2,309	2,693	3,078	3,463	3,848
50000	0,392	0,785	1,178	1,570	1,963	2,356	2,748	3,141	3,534	3,927

TABLE VI.

Pour la réduction des Angles au plan des Cordes.

Argumens : $(P+P')$ et $(P-P')$.

Somme ou différence des distances en mètres des deux signaux observés.

Nota. La réduction est évaluée en secondes centésimales.

$(P \pm P')$ en mètres.	—	$(P \pm P')$ en mètres.	—	$(P \pm P')$ en mètres.	—	$(P \pm P')$ en mètres.	—	$(P \pm P')$ en mètres.	—
0000	0,000	40000	0,025	80000	0,099	120000	0,222	160000	
1000	0,000	41000	0,026	81000	0,101	121000	0,226	161000	
2000	0,000	42000	0,027	82000	0,104	122000	0,229	162000	
3000	0,000	43000	0,028	83000	0,106	123000	0,233	163000	
4000	0,000	44000	0,030	84000	0,109	124000	0,237	164000	
5000	0,000	45000	0,031	85000	0,111	125000	0,241	165000	
6000	0,001	46000	0,033	86000	0,114	126000	0,245	166000	
7000	0,001	47000	0,034	87000	0,117	127000	0,249	167000	
8000	0,001	48000	0,035	88000	0,119	128000	0,253	168000	
9000	0,001	49000	0,037	89000	0,122	129000	0,257	169000	
10000	0,001	50000	0,038	90000	0,125	130000	0,261	170000	
11000	0,002	51000	0,040	91000	0,128	131000	0,265	171000	
12000	0,002	52000	0,042	92000	0,131	132000	0,269	172000	
13000	0,003	53000	0,043	93000	0,133	133000	0,273	173000	
14000	0,003	54000	0,045	94000	0,136	134000	0,277	174000	
15000	0,003	55000	0,046	95000	0,139	135000	0,281	175000	
16000	0,004	56000	0,048	96000	0,142	136000	0,285	176000	
17000	0,004	57000	0,050	97000	0,145	137000	0,289	177000	
18000	0,005	58000	0,052	98000	0,148	138000	0,294	178000	
19000	0,005	59000	0,054	99000	0,151	139000	0,298	179000	
20000	0,006	60000	0,056	100000	0,154	140000	0,302	180000	
21000	0,007	61000	0,057	101000	0,157	141000	0,307	181000	
22000	0,007	62000	0,059	102000	0,160	142000	0,311	182000	
23000	0,008	63000	0,061	103000	0,164	143000	0,315	183000	
24000	0,009	64000	0,063	104000	0,167	144000	0,320	184000	
25000	0,009	65000	0,065	105000	0,170	145000	0,324	185000	
26000	0,010	66000	0,067	106000	0,173	146000	0,329	186000	
27000	0,011	67000	0,069	107000	0,177	147000	0,333	187000	
28000	0,012	68000	0,071	108000	0,180	148000	0,338	188000	
29000	0,013	69000	0,073	109000	0,184	149000	0,342	189000	
30000	0,014	70000	0,076	110000	0,187	150000	0,347	190000	
31000	0,015	71000	0,078	111000	0,190	151000	0,352	191000	
32000	0,016	72000	0,080	112000	0,193	152000	0,356	192000	
33000	0,017	73000	0,082	113000	0,197	153000	0,361	193000	
34000	0,018	74000	0,084	114000	0,200	154000	0,366	194000	
35000	0,019	75000	0,087	115000	0,204	155000	0,370	195000	
36000	0,020	76000	0,089	116000	0,207	156000	0,375	196000	
37000	0,021	77000	0,091	117000	0,211	157000	0,380	197000	
38000	0,022	78000	0,094	118000	0,215	158000	0,385	198000	
39000	0,023	79000	0,096	119000	0,218	159000	0,390	199000	
40000	0,025	80000	0,099	120000	0,222	160000	0,395	200000	

TABLE VII. Grades de Longitude terrestre dans le Sphéroïde, en supposant l'aplatissement de $\frac{1}{335}$.

Latit.	GRADES de longitude.	Différence	Latit.	GRADES de longitude.	Différence.	Latit.	GRADES. de longitude.	Différence.	Latit.	GRADES de longitude.	Différence
G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.
0	100149,4	12,3	25	92566,4	610,6	50	70922,1	1119,5	75	38423,4	1460,6
1	100137,1	36,8	26	91955,8	633,2	51	69802,6	1136,8	76	36962,8	1469,8
2	100100,3	61,4	27	91322,6	655,7	52	68665,8	1153,8	77	35493,0	1478,8
3	100038,9	85,9	28	90666,9	678,0	53	67512,0	1170,7	78	34014,2	1487,2
4	99953,0	110,5	29	89988,9	700,3	54	66341,3	1187,1	79	32527,0	1495,4
5	99842,5	134,9	30	89288,6	722,2	55	65154,2	1203,3	80	31031,6	1508,1
6	99707,6	159,4	31	88566,4	744,0	56	63950,9	1219,2	81	29528,5	1510,6
7	99548,2	183,9	32	87822,4	765,7	57	62731,7	1234,9	82	28017,9	1517,6
8	99364,3	208,1	33	87056,7	787,2	58	61496,8	1250,1	83	26500,3	1524,2
9	99156,2	232,6	34	86269,5	808,5	59	60246,7	1265,2	84	24976,1	1530,5
10	98923,6	256,8	35	85461,0	829,6	60	58981,5	1279,9	85	23445,6	1536,4
11	98666,8	281,0	36	84631,4	850,5	61	57701,6	1294,2	86	21909,2	1541,9
12	98385,8	305,2	37	83780,9	871,2	62	56407,4	1308,3	87	20367,3	1547,0
13	98080,6	329,3	38	82909,7	891,6	63	55099,1	1322,0	88	18820,3	1551,7
14	97751,3	358,2	39	82018,1	911,9	64	53777,1	1335,4	89	17268,6	1556,0
15	97398,1	377,2	40	81106,2	932,1	65	52441,7	1348,6	90	15712,6	1560,0
16	97020,9	401,0	41	80174,1	951,8	66	51093,1	1361,3	91	14152,6	1563,6
17	96616,9	424,8	42	79222,3	971,4	67	49731,8	1373,6	92	12589,0	1566,7
18	96195,1	448,4	43	78250,9	990,8	68	48358,3	1385,8	93	11022,3	1569,4
19	95746,8	471,9	44	77260,1	1010,0	69	46972,4	1397,6	94	9452,9	1571,9
20	95274,9	495,3	45	76250,1	1028,8	70	45574,8	1408,9	95	7881,0	1573,8
21	94779,6	518,7	46	75221,3	1047,5	71	44165,9	1419,9	96	6307,2	1575,4
22	94260,9	541,8	47	74173,8	1065,8	72	42746,0	1430,7	97	4731,8	1576,1
23	93719,1	564,9	48	73108,0	1084,0	73	41315,3	1440,9	98	3155,7	1577,8
24	93154,2	587,8	49	72024,0	1101,9	74	39874,4	1451,0	99	1577,8	1577,9
25	92566,4		50	70922,1		75	38423,4		100	0,0	1577,8

TABLE VIII. Grades de Latitude terrestre dans le Sphéroïde, en supposant l'aplatissement de $\frac{1}{335}$.

Latit.	GRADES de latitude.	Différence	Latit.	GRADES de latitude.	Différence.	Latit.	GRADES de latitude.	Différence.	Latit.	GRADES de latitude.	Différence
G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.	G.	Mètres.	M.
0	99552,5	0,4	25	99687,9	10,2	50	100006,2	14,1	75	100322,0	9,7
1	99552,9	0,9	26	99698,1	10,5	51	100020,3	14,1	76	100331,7	9,4
2	99553,8	1,3	27	99708,6	10,8	52	100034,4	14,0	77	100341,1	9,0
3	99555,1	1,8	28	99719,4	11,1	53	100048,4	14,0	78	100350,1	8,7
4	99556,9	2,1	29	99730,5	11,4	54	100062,4	13,9	79	100358,8	8,4
5	99559,0	2,8	30	99741,9	11,6	55	100076,3	13,9	80	100367,2	7,9
6	99561,8	3,0	31	99753,5	11,8	56	100090,2	13,7	81	100375,1	7,6
7	99564,7	3,5	32	99765,3	12,1	57	100103,9	13,7	82	100382,7	7,2
8	99568,2	3,9	33	99777,4	12,3	58	100117,6	13,6	83	100389,9	6,9
9	99572,1	4,3	34	99789,7	12,5	59	100131,2	13,4	84	100396,8	6,4
10	99576,4	4,8	35	99802,2	12,7	60	100144,6	13,3	85	100403,2	6,1
11	99581,2	5,1	36	99814,9	12,9	61	100157,9	13,1	86	100409,3	5,6
12	99586,3	5,6	37	99827,8	13,1	62	100171,0	13,0	87	100414,9	5,2
13	99591,8	5,9	38	99840,9	13,2	63	100184,0	12,8	88	100420,1	4,8
14	99597,8	6,4	39	99854,1	13,4	64	100196,8	12,6	89	100424,9	4,4
15	99604,2	6,7	40	99867,5	13,5	65	100209,4	12,3	90	100429,3	3,9
16	99610,9	7,1	41	99881,0	13,6	66	100221,7	12,2	91	100433,2	3,6
17	99618,0	7,4	42	99894,6	13,7	67	100233,9	12,0	92	100436,8	3,1
18	99625,4	8,0	43	99908,3	13,8	68	100245,9	11,7	93	100439,9	2,6
19	99633,4	8,2	44	99922,1	13,9	69	100257,5	11,5	94	100442,5	2,2
20	99641,6	8,6	45	99936,0	13,9	70	100269,0	11,2	95	100444,7	1,8
21	99650,2	8,9	46	99950,0	14,0	71	100280,2	10,9	96	100446,5	1,3
22	99659,1	9,3	47	99964,0	14,0	72	100291,1	10,6	97	100447,8	0,9
23	99668,4	9,6	48	99978,0	14,1	73	100301,7	10,3	98	100448,7	0,5
24	99678,0	9,9	49	99992,1	14,1	74	100312,0	10,0	99	100449,2	
25	99687,9		50	100006,2		75	100322,0		100		

TABLE IX.

γ désigne le rayon de courbure du méridien à la latitude H, et N celui de l'arc perpendiculaire. On a en outre $\log P = \frac{1}{\gamma \sin 1''}$, et $\log F = \frac{1}{N \sin 1''}$.

Cette Table est calculée pour l'aplatissement $\frac{1}{180}$, qui paraît convenir à la France.

Argum. Latitude H.	Log γ.	Diff. com.	Log Fac. P.	Log N.	Diff. com.	Log Fact. F.
45° 0	6,8032999	563	9,0005802	6,8061044	188	8,9977257
50	6,8033562	564	9,0005239	6,8061232	187	8,9977569
46 0	6,8034126	566	9,0004675	6,8061419	190	8,9977882
50	6,8034692		9,0004109	6,8061609		8,9977192
		567			188	
47 0	6,8035259	568	9,0003542	6,8061797	189	8,9977004
50	6,8035827	569	9,0002974	6,8061986	190	8,9976815
48 0	6,8036396	568	9,0002405	6,8062176	189	8,9976625
50	6,8036964		9,0001837	6,8062365		8,9976436
		570			190	
49 0	6,8037534	569	9,0001267	6,8062555	190	8,9976246
50	6,8038103	571	9,0000698	6,8062745	190	8,9976056
50 0	6,8038674	570	9,0000127	6,8062935	190	8,9975866
50	6,8039244		8,9999557	6,8063125	190	8,9975676
		570			190	
51 0	6,8039814	570	8,9998987	6,8063315		8,9975486
50	6,8040384	569	8,9998417	6,8063506	191	8,9975295
52 0	6,8040953	569	8,9997848	6,8063696	190	8,9975105
50	6,8041522		8,9997279	6,8063885	189	8,9974916
		568			189	
53 0	6,8042090	567	8,9996711	6,8064074	189	8,9974727
50	6,8042657	567	8,9996144	6,8064263	189	8,9974538
54 0	6,8043224	565	8,9995577	6,8064452	188	8,9974349
50	6,8043789		8,9995012	6,8064640		8,9974161
		564			189	
55 0	6,8044353	563	8,9994448	6,8064829	188	8,9973972
50	6,8044916	561	8,9993885	6,8065017	186	8,9973784
56 0	6,8045477	561	8,9993324	6,8065203	187	8,9973598
50	6,8046038		8,9992763	6,8065390		8,9973411
		557			186	
57 0	6,8046595	556	8,9992206	6,8065576	185	8,9973225
50	6,8047151	554	8,9991650	6,8065761	185	8,9973040
58 0	6,8047705	552	8,9991096	6,8065946	184	8,9972855
50	6,8048257		8,9990544	6,8066130		8,9972671
		550			183	
59 0	6,8048807	549	8,9989994	6,8066313	183	8,9972488
50	6,8049356	542	8,9989445	6,8066496	180	8,9972305
60 0	6,8049898	541	8,9988903	6,8066676	181	8,9972125
50	6,8050439		8,9988362	6,8066857		8,9971944

TABLE X.

Valeurs du facteur $e^2 \cos^2 H$.

Aplatissement, $\frac{1}{180}$.

Latitude.		$e^2 \cos^2 H$. Log.	d. l.	Nombres.	d. n.
45°	0	7,80664	117	0,0064068	173
	1	7,80547	117	0,0063895	172
	2	7,80430	117	0,0063723	171
	3	7,80313	118	0,0063552	170
	4	7,80195	118	0,0063380	172
	5	7,80077		0,0063208	
			118		192
	6	7,79959	120	0,0063036	174
	7	7,79839	120	0,0062862	173
	8	7,79719	118	0,0062689	172
	9	7,79601	121	0,0062517	172
46	0	7,79480		0,0062345	
			120		172
	1	7,79360	120	0,0062173	172
	2	7,79240	122	0,0062001	173
	3	7,79118	121	0,0061828	173
	4	7,78997	123	0,0061655	174
	5	7,78874		0,0061481	
			122		173
	6	7,78752	123	0,0061308	173
	7	7,78629	123	0,0061135	173
	8	7,78506	124	0,0060962	173
	9	7,78382	123	0,0060789	173
47	0	7,78259		0,0060616	
			125		174
	1	7,78134	125	0,0060442	174
	2	7,78009	125	0,0060268	173
	3	7,77884	126	0,0060095	174
	4	7,77758	126	0,0059921	174
	5	7,77632		0,0059747	
			126		173
	6	7,77506	127	0,0059574	174
	7	7,77379	127	0,0059400	173
	8	7,77252	127	0,0059227	173
	9	7,77125	128	0,0059054	173
48	0	7,76997		0,0058881	
			129		175
	1	7,76868	128	0,0058706	173
	2	7,76740	129	0,0058533	174
	3	7,76611	130	0,0058359	174
	4	7,76481	130	0,0058185	174
	5	7,76351		0,0058011	
			130		174
	6	7,76221	131	0,0057837	174
	7	7,76090	131	0,0057663	174
	8	7,75959	132	0,0057489	174
	9	7,75827	132	0,0057315	174
49	0	7,75695		0,0057141	

Latitude.		$e^2 \cos^2 H$. Log.	d. l.	Nombres.	d. n.
			132		174
49°	0	7,75695	132	0,0057141	174
	1	7,75563	133	0,0056967	174
	2	7,75430	134	0,0056793	174
	3	7,75296	133	0,0056619	174
	4	7,75163	134	0,0056445	174
	5	7,75029		0,0056271	
			135		174
	6	7,74894	135	0,0056097	174
	7	7,74759	135	0,0055923	174
	8	7,74624	136	0,0055749	174
	9	7,74488	136	0,0055575	174
50	0	7,74352		0,0055401	
			137		174
	1	7,74215	137	0,0055227	174
	2	7,74078	137	0,0055053	174
	3	7,73941	138	0,0054879	174
	4	7,73803	139	0,0054705	174
	5	7,73664		0,0054531	
			138		174
	6	7,73526	140	0,0054357	174
	7	7,73386	139	0,0054183	174
	8	7,73247	140	0,0054009	174
	9	7,73107	141	0,0053835	174
51	0	7,72966		0,0053661	
			141		174
	1	7,72825	142	0,0053487	174
	2	7,72683	141	0,0053313	174
	3	7,72542	143	0,0053139	174
	4	7,72399	143	0,0052965	174
	5	7,72256		0,0052791	
			143		174
	6	7,72113	143	0,0052617	173
	7	7,71970	145	0,0052444	174
	8	7,71825	144	0,0052270	174
	9	7,71681	145	0,0052096	173
52	0	7,71536		0,0051923	
			146		174
	1	7,71390	146	0,0051749	174
	2	7,71244	146	0,0051575	173
	3	7,71098	147	0,0051402	174
	4	7,70951	148	0,0051228	174
	5	7,70803		0,0051054	
			147		173
	6	7,70656	149	0,0050881	174
	7	7,70507	148	0,0050707	173
	8	7,70359	150	0,0050534	174
	9	7,70209	150	0,0050360	173
53	0	7,70059		0,0050187	

SUITE DE LA TABLE X.

Valeurs du facteur $e^2 \cos^2 H$.

Aplatissement, $\frac{1}{180}$.

Latitude.		$e^2 \cos^2 H$. Log.	d. l.	Nombres.	d. n.	Latitude.		$e^2 \cos^2 H$. Log.	d. l.	Nombres.	d. n.
			150		173				170		170
53°	0	7,70059	150	0,0050187	173	57°	0	7,63665	171	0,0043316	170
	1	7,69909	150	0,0050014	173		1	7,63494	171	0,0043146	170
	2	7,69759	151	0,0049841	173		2	7,63323	172	0,0042976	170
	3	7,69608	152	0,0049668	173		3	7,63151	172	0,0042806	169
	4	7,69456	152	0,0049495	173		4	7,62979	173	0,0042637	169
	5	7,69304		0,0049322			5	7,62806		0,0042468	
			153		174				173		169
	6	7,69151	153	0,0049148	173		6	7,62633	174	0,0042299	169
	7	7,68998	153	0,0048975	172		7	7,62459	174	0,0042130	169
	8	7,68845	154	0,0048803	172		8	7,62285	175	0,0041961	168
	9	7,68691	155	0,0048631	174		9	7,62110	176	0,0041793	169
54	0	7,68536		0,0048457		58	0	7,61934		0,0041624	
			155		172				176		169
	1	7,68381	155	0,0048285	172		1	7,61758	177	0,0041455	168
	2	7,68226	156	0,0048113	173		2	7,61581	177	0,0041287	168
	3	7,68070	157	0,0047940	173		3	7,61404	178	0,0041119	168
	4	7,67913	157	0,0047767	172		4	7,61226	179	0,0040951	169
	5	7,67756		0,0047595			5	7,61047		0,0040782	
			157		172				179		168
	6	7,67599	158	0,0047423	172		6	7,60868	179	0,0040614	167
	7	7,67441	158	0,0047251	172		7	7,60689	181	0,0040447	168
	8	7,67283	160	0,0047079	173		8	7,60508	181	0,0040279	168
	9	7,67123	159	0,0046906	171		9	7,60327	181	0,0040111	166
55	0	7,66964		0,0046735		59	0	7,60146		0,0039945	
			160		172				182		167
	1	7,66804	161	0,0046563	172		1	7,59964	183	0,0039778	168
	2	7,66643	161	0,0046391	172		2	7,59781	183	0,0039610	166
	3	7,66482	161	0,0046219	171		3	7,59598	183	0,0039444	166
	4	7,66321	162	0,0046048	172		4	7,59415	185	0,0039278	167
	5	7,66159		0,0045876			5	7,59230		0,0039111	
			163		172				185		166
	6	7,65996	163	0,0045704	171		6	7,59045	186	0,0038945	167
	7	7,65833	164	0,0045533	171		7	7,58859	186	0,0038778	165
	8	7,65669	164	0,0045362	171		8	7,58673	187	0,0038613	166
	9	7,65505	164	0,0045191	171		9	7,58486	187	0,0038447	166
56	0	7,65341		0,0045020		60	0	7,58299		0,0038281	
			165		170				188		165
	1	7,65176	166	0,0044850	171		1	7,58111	189	0,0038118	165
	2	7,65010	166	0,0044679	171		2	7,57922	190	0,0037951	166
	3	7,64844	167	0,0044508	171		3	7,57732	190	0,0037785	165
	4	7,64677	168	0,0044337	171		4	7,57542	190	0,0037620	164
	5	7,64509		0,0044166			5	7,57352		0,0037456	
			167		170				191		165
	6	7,64342	169	0,0043996	170		6	7,57161	192	0,0037291	16[illegible]
	7	7,64173	169	0,0043826	170		7	7,56969	193	0,0037127	16[illegible]
	8	7,64004	169	0,0043656	170		8	7,56776	193	0,0036962	16[illegible]
	9	7,63835	170	0,0043486	170		9	7,56583	194	0,0036798	16[illegible]
57	0	7,63665		0,0043316		61	0	7,56389		0,0036634	

TABLE XI. (Aplatissement, $\frac{1}{335}$).

H, ou Latitude.	Log du facteur $\frac{2\pi a}{400} \times \frac{1}{(1-e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$	D	$e^2 \cos^2 H$.	D.	H, ou Latitude.	Log du facteur $\frac{2\pi a}{400} \times \frac{1}{(1-e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$	D.	$e^2 \cos^2 H$.	D.
							18		83
30° 1	5,0009171	16	0,0047250	76	35° 1	5,0010039	18	0,0043255	84
2	5,0009187	17	0,0047174	77	2	5,0010057	18	0,0043171	84
3	5,0009204	16	0,0047097	75	3	5,0010075	18	0,0043087	84
4	5,0009220	17	0,0047022	77	4	5,0010093	19	0,0043003	84
5	5,0009237	16	0,0046945	77	5	5,0010112	18	0,0042919	84
6	5,0009253	17	0,0046868	77	6	5,0010130	19	0,0042835	84
7	5,0009270	17	0,0046791	76	7	5,0010149	18	0,0042751	85
8	5,0009287	17	0,0046715	78	8	5,0010167	19	0,0042666	84
9	5,0009304	16	0,0046637	77	9	5,0010186	18	0,0042582	85
31 0	5,0009320	17	0,0046560	78	36 0	5,0010204	19	0,0042497	85
1	5,0009337	17	0,0046482	77	1	5,0010223	18	0,0042412	85
2	5,0009354	17	0,0046405	78	2	5,0010241	19	0,0042327	85
3	5,0009371	16	0,0046327	79	3	5,0010260	18	0,0042242	85
4	5,0009387	17	0,0046248	78	4	5,0010278	19	0,0042157	85
5	5,0009404	17	0,0046170	78	5	5,0010297	18	0,0042072	86
6	5,0009421	18	0,0046092	78	6	5,0010315	19	0,0041986	85
7	5,0009439	17	0,0046014	79	7	5,0010334	18	0,0041901	86
8	5,0009456	18	0,0045935	79	8	5,0010352	19	0,0041815	85
9	5,0009474	17	0,0045856	79	9	5,0010371	18	0,0041730	86
32 0	5,0009491	17	0,0045777	79	37 0	5,0010389	19	0,0041644	86
1	5,0009508	18	0,0045698	79	1	5,0010408	19	0,0041558	86
2	5,0009524	18	0,0045619	80	2	5,0010427	19	0,0041472	87
3	5,0009542	17	0,0045539	79	3	5,0010446	18	0,0041385	86
4	5,0009559	18	0,0045460	81	4	5,0010464	19	0,0041299	87
5	5,0009577	17	0,0045379	79	5	5,0010483	19	0,0041212	86
6	5,0009594	18	0,0045300	80	6	5,0010502	19	0,0041126	87
7	5,0009612	17	0,0045220	81	7	5,0010521	19	0,0041039	86
8	5,0009629	18	0,0045139	80	8	5,0010540	19	0,0040953	88
9	5,0009647	17	0,0045059	80	9	5,0010559	18	0,0040865	86
33 0	5,0009664	18	0,0044979	81	38 0	5,0010577	19	0,0040779	87
1	5,0009682	17	0,0044898	81	1	5,0010596	19	0,0040692	88
2	5,0009699	18	0,0044817	80	2	5,0010615	19	0,0040604	87
3	5,0009717	17	0,0044737	82	3	5,0010634	19	0,0040517	88
4	5,0009734	18	0,0044655	81	4	5,0010653	19	0,0040429	87
5	5,0009752	18	0,0044574	82	5	5,0010672	19	0,0040342	88
6	5,0009770	18	0,0044492	81	6	5,0010691	19	0,0040254	87
7	5,0009788	18	0,0044411	81	7	5,0010710	20	0,0040167	88
8	5,0009806	18	0,0044330	83	8	5,0010730	19	0,0040079	89
9	5,0009824	17	0,0044247	82	9	5,0010749	19	0,0039990	87
34 0	5,0009841	18	0,0044165	82	39 0	5,0010768	19	0,0039903	87
1	5,0009859	18	0,0044083	82	1	5,0010787	19	0,0039816	90
2	5,0009877	18	0,0044001	83	2	5,0010806	20	0,0039726	88
3	5,0009895	17	0,0043918	82	3	5,0010826	19	0,0039638	88
4	5,0009912	18	0,0043836	83	4	5,0010845	19	0,0039550	89
5	5,0009930	18	0,0043753	83	5	5,0010864	19	0,0039461	88
6	5,0009948	18	0,0043670	82	6	5,0010883	20	0,0039373	89
7	5,0009966	18	0,0043588	82	7	5,0010903	19	0,0039284	89
8	5,0009984	19	0,0043506	84	8	5,0010922	20	0,0039195	89
9	5,0010003	18	0,0043422	84	9	5,0010942	19	0,0039106	89
35 0	5,0010021		0,0043338		40 0	5,0010961		0,0039017	

SUITE DE LA TABLE XI.

H, ou Latitude.	Log du facteur $\frac{2\pi a}{400} \times \frac{1}{(1-e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$	D.	$e^2 \cos^2 H$.	D.	H, ou Latitude.	Log du facteur $\frac{2\pi a}{400} \times \frac{1}{(1-e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$	D.	$e^2 \cos^2 H$.
40° 1	5,0010980	19	0,0038927	90	45° 1	5,0011972	19	0,0034376
2	5,0010999	19	0,0038839	88	2	5,0011991	19	0,0034284
3	5,0011019	20	0,0038749	90	3	5,0012011	20	0,0034191
4	5,0011038	19	0,0038660	89	4	5,0012031	20	0,0034098
5	5,0011058	20	0,0038570	90	5	5,0012052	21	0,0034006
6	5,0011077	19	0,0038481	89	6	5,0012072	20	0,0033913
7	5,0011097	20	0,0038391	90	7	5,0012092	20	0,0033820
8	5,0011116	19	0,0038301	90	8	5,0012112	20	0,0033728
9	5,0011136	20	0,0038212	89	9	5,0012132	20	0,0033635
41 0	5,0011155	19	0,0038122	90	46 0	5,0012152	20	0,0033542
1	5,0011175	20	0,0038032	90	1	5,0012172	20	0,0033449
2	5,0011194	19	0,0037942	90	2	5,0012192	21	0,0033356
3	5,0011214	20	0,0037853	90	3	5,0012213	20	0,0033263
4	5,0011234	20	0,0037761	91	4	5,0012233	21	0,0033170
5	5,0011254	20	0,0037671	90	5	5,0012254	20	0,0033077
6	5,0011274	20	0,0037581	90	6	5,0012274	21	0,0032984
7	5,0011294	19	0,0037491	89	7	5,0012295	20	0,0032891
8	5,0011313	20	0,0037400	91	8	5,0012315	20	0,0032798
9	5,0011333	19	0,0037309	90	9	5,0012355	20	0,0032704
42 0	5,0011352	20	0,0037219	91	47 0	5,0012355	20	0,0032611
1	5,0011372	19	0,0037128	91	1	5,0012375	20	0,0032518
2	5,0011391	20	0,0037037	91	2	5,0012395	21	0,0032425
3	5,0011411	19	0,0036946	91	3	5,0012416	20	0,0032331
4	5,0011430	20	0,0036855	91	4	5,0012436	21	0,0032238
5	5,0011450	20	0,0036764	91	5	5,0012457	20	0,0032145
6	5,0011470	20	0,0036673	91	6	5,0012477	21	0,0032051
7	5,0011490	20	0,0036582	91	7	5,0012498	20	0,0031958
8	5,0011510	20	0,0036491	91	8	5,0012518	20	0,0031864
9	5,0011530	20	0,0036400	92	9	5,0012538	20	0,0031771
43 0	5,0011550	20	0,0036308	91	48 0	5,0012558	20	0,0031678
1	5,0011570	20	0,0036217	92	1	5,0012578	20	0,0031584
2	5,0011590	20	0,0036125	91	2	5,0012598	21	0,0031491
3	5,0011610	20	0,0036034	92	3	5,0012619	20	0,0031397
4	5,0011630	20	0,0035942	92	4	5,0012639	21	0,0031304
5	5,0011650	20	0,0035850	91	5	5,0012660	20	0,0031210
6	5,0011670	20	0,0035759	92	6	5,0012680	21	0,0031117
7	5,0011690	20	0,0035667	92	7	5,0012701	20	0,0031023
8	5,0011710	20	0,0035575	92	8	5,0012721	21	0,0030930
9	5,0011730	20	0,0035483	92	9	5,0012742	20	0,0030836
44 0	5,0011750	20	0,0035391	92	49 0	5,0012762	21	0,0030742
1	5,0011770	20	0,0035299	92	1	5,0012783	20	0,0030649
2	5,0011790	20	0,0035207	92	2	5,0012803	21	0,0030555
3	5,0011810	20	0,0035115	92	3	5,0012824	20	0,0030462
4	5,0011830	20	0,0035023	92	4	5,0012844	21	0,0030368
5	5,0011850	20	0,0034931	93	5	5,0012865	20	0,0030274
6	5,0011870	20	0,0034838	92	6	5,0012885	20	0,0030181
7	5,0011890	20	0,0034746	92	7	5,0012905	20	0,0030087
8	5,0011910	20	0,0034654	93	8	5,0012925	21	0,0029993
9	5,0011930	21	0,0034561	92	9	5,0012946	20	0,0029900
45 0	5,0011951		0,0034469		50 0	5,0012966		0,0029806

SUITE DE LA TABLE XI.

H, ou Latitude.	Log. du facteur $\frac{2\pi a}{400} \times \frac{1}{(1-e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$	Diff.	$e^2 \cos^2 H$.	Diff.	H, ou Latitude.	Log. du facteur $\frac{2\pi a}{400} \times \frac{1}{(1-e^2 \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$	Diff.	$e^2 \cos^2 H$.	Diff.
		21		94			20		93
50° 1	5,0012987	20	0,0029712	93	55° 1	5,0014002	20	0,0025051	92
2	5,0013007	21	0,0029619	94	2	5,0014022	20	0,0024959	93
3	5,0013028	20	0,0029525	93	3	5,0014042	20	0,0024866	92
4	5,0013048	21	0,0029432	94	4	5,0014062	20	0,0024774	92
5	5,0013069		0,0029338		5	5,0014082		0,0024682	
		20		94			20		93
6	5,0013089	20	0,0029244	93	6	5,0014102	20	0,0024589	92
7	5,0013109	20	0,0029151	94	7	5,0014122	20	0,0024497	92
8	5,0013129	21	0,0029057	93	8	5,0014142	20	0,0024405	92
9	5,0013150	20	0,0028964	94	9	5,0014162	20	0,0024313	92
51 0	5,0013170		0,0028870		56 0	5,0014182		0,0024221	
		21		94			20		92
1	5,0013191	20	0,0028776	93	1	5,0014202	20	0,0024129	92
2	5,0013211	21	0,0028683	94	2	5,0014222	20	0,0024037	92
3	5,0013232	20	0,0028589	94	3	5,0014242	20	0,0023945	91
4	5,0013252	20	0,0028495	93	4	5,0014262	20	0,0023854	92
5	5,0013272		0,0028402		5	5,0014282		0,0023762	
		20		94			20		92
6	5,0013292	21	0,0028308	93	6	5,0014302	20	0,0023670	92
7	5,0013313	20	0,0028215	93	7	5,0014322	20	0,0023578	91
8	5,0013333	21	0,0028122	94	8	5,0014342	20	0,0023487	92
9	5,0013354	20	0,0028028	93	9	5,0014362	20	0,0023395	91
52 0	5,0013374		0,0027935		57 0	5,0014382		0,0023304	
		20		94			20		91
1	5,0013394	20	0,0027841	93	1	5,0014402	20	0,0023213	92
2	5,0013414	21	0,0027748	94	2	5,0014422	20	0,0023121	91
3	5,0013435	20	0,0027654	93	3	5,0014442	20	0,0023030	91
4	5,0013455	21	0,0027561	93	4	5,0014462	20	0,0022939	91
5	5,0013476		0,0027468		5	5,0014482		0,0022848	
		20		94			20		91
6	5,0013496	21	0,0027374	93	6	5,0014502	20	0,0022757	91
7	5,0013517	20	0,0027281	93	7	5,0014522	20	0,0022666	91
8	5,0013537	21	0,0027188	94	8	5,0014542	20	0,0022575	91
9	5,0013558	20	0,0027094	93	9	5,0014562	19	0,0022484	90
53 0	5,0013578		0,0027001		58 0	5,0014581		0,0022394	
		20		93			20		91
1	5,0013598	20	0,0026908	93	1	5,0014601	19	0,0022303	91
2	5,0013618	20	0,0026815	93	2	5,0014620	20	0,0022212	91
3	5,0013638	20	0,0026722	94	3	5,0014640	20	0,0022121	89
4	5,0013658	20	0,0026628	93	4	5,0014660	20	0,0022032	91
5	5,0013678		0,0026535		5	5,0014680		0,0021941	
		20		93			19		90
6	5,0013698	21	0,0026442	93	6	5,0014699	20	0,0021851	90
7	5,0013719	20	0,0026349	93	7	5,0014719	19	0,0021761	90
8	5,0013739	21	0,0026256	93	8	5,0014738	20	0,0021671	90
9	5,0013760	20	0,0026163	93	9	5,0014758	19	0,0021581	90
54 0	5,0013780		0,0026070		59 0	5,0014777		0,0021491	
		20		92			20		89
1	5,0013800	20	0,0025978	93	1	5,0014797	19	0,0021400	89
2	5,0013820	20	0,0025885	93	2	5,0014816	20	0,0021311	90
3	5,0013840	20	0,0025792	93	3	5,0014836	19	0,0021221	89
4	5,0013860	21	0,0025699	93	4	5,0014855	20	0,0021132	90
5	5,0013881		0,0025606		5	5,0014875		0,0021042	
		20		92			20		90
6	5,0013901	20	0,0025514	93	6	5,0014895	20	0,0020952	89
7	5,0013921	20	0,0025421	92	7	5,0014915	20	0,0020863	90
8	5,0013941	21	0,0025329	93	8	5,0014935	20	0,0020773	89
9	5,0013962	20	0,0025236	92	9	5,0014955	19	0,0020684	88
55 0	5,0013982		0,0025144		60 0	5,0014974		0,0020596	

TABLE XII.

Arcs du méridien, degrés de latitude et degrés des parallèles, pour l'aplatissement $0,00324 = \frac{1}{309}$, en mètres.

(Extrait de la *Base du Système métrique décimal.*)

Latit.	Arcs du méridien.	Degrés de Latitude.	Différ.	Degrés des Parallèles.	Différ.	Latit.	Arcs du méridien.	Degrés de Latitude.	Diff.	Degrés des Parallèles.	Différ.
0°	000000,0	110571,4	0,7	111277,5	16,7	45°	4984505,1	111119,4	18,8	78812,6	1388,0
1	110571,4	110572,1	1,2	111260,8	50,5	46	5095624,5	111138,3	18,8	77409,6	1406,8
2	221143,5	110573,4	2,0	111210,3	84,2	47	5206762,9	111157,2	18,9	76022,8	1425,7
3	331716,9	110575,4	2,6	111126,1	117,9	48	5317920,0	111176,0	18,7	74592,6	1443,6
4	442292,3	110578,0	3,2	111098,2	151,5	49	5429096,0	111194,7	18,6	73139,6	1462,3
5	552870,3	110581,2	3,9	110856,7	184,8	50	5540290,7	111213,3	18,5	71664,1	1480,9
6	663451,5	110585,1	4,5	110671,9	218,4	51	5651504,0	111231,8	18,3	70166,5	1499,1
7	774036,6	110589,6	5,2	110453,5	251,8	52	5762735,8	111250,1	18,2	68647,4	1516,3
8	884626,2	110594,8	5,8	110201,7	285,4	53	5873985,9	111268,3	18,0	67107,1	1534,3
9	995221,0	110600,6	6,4	109916,3	318,5	54	5985254,2	111286,3	17,8	65546,3	1551,8
10	1105821,6	110607,0	7,0	109597,8	351,8	55	6096540,5	111304,1	17,6	63965,3	1569,4
11	1216428,6	110614,0	7,6	109246,0	384,9	56	6207844,6	111321,7	17,3	62364,5	1586,8
12	1327042,6	110621,6	8,3	108861,1	417,9	57	6319166,3	111339,0	17,0	60744,5	1603,9
13	1437664,2	110629,9	8,8	108443,2	450,6	58	6430505,3	111356,0	16,7	59105,7	1620,7
14	1548294,1	110638,7	9,3	107992,6	483,3	59	6541861,3	111372,7	16,5	57448,8	1637,2
15	1658932,8	110648,0	10,0	107509,3	516,1	60	6653234,0	111389,2	16,0	55774,2	1653,6
16	1769580,8	110658,0	10,5	106993,2	548,5	61	6764623,2	111405,2	15,8	54082,5	1669,7
17	1880238,8	110668,4	11,0	106444,7	580,0	62	6876028,4	111421,0	15,3	52374,0	1685,5
18	1990907,2	110679,5	11,5	105863,9	612,8	63	6987449,4	111436,3	14,9	50649,3	1701,3
19	2101586,7	110691,0	12,1	105251,1	644,9	64	7098885,7	111451,2	14,6	48909,0	1716,3
20	2212277,7	110703,1	12,5	104606,2	676,5	65	7210336,9	111465,8	14,1	47153,4	1731,6
21	2322980,8	110715,6	13,1	103929,7	708,1	66	7321802,7	111479,9	13,7	45383,3	1746,1
22	2433696,4	110728,7	13,5	103221,6	739,5	67	7433282,6	111493,6	13,1	43599,4	1760,9
23	2544425,1	110742,2	13,9	102482,1	770,6	68	7544776,1	111506,7	12,8	41801,8	1775,6
24	2655167,3	110756,1	14,4	101711,5	801,5	69	7656282,8	111519,5	12,2	39991,3	1789,5
25	2765923,4	110770,5	14,8	100910,0	832,1	70	7767802,3	111531,7	11,7	38168,4	1803,2
26	2876693,9	110785,4	15,2	100077,9	862,8	71	7879334,0	111543,4	11,1	36333,8	1816,0
27	2987479,3	110800,5	15,6	99215,1	892,6	72	7990877,4	111554,5	10,6	34487,8	1828,6
28	3098279,8	110816,1	15,9	98322,5	922,9	73	8102431,9	111565,1	10,1	32631,2	1840,8
29	3209095,9	110832,0	16,3	97399,6	952,5	74	8213997,0	111575,2	9,5	30764,4	1852,1
30	3319927,9	110848,3	16,6	96447,1	981,7	75	8325572,2	111584,7	9,0	28888,3	1863,3
31	3430776,3	110864,9	16,9	95465,4	1010,8	76	8437156,9	111593,7	8,3	27003,0	1873,7
32	3541641,2	110881,8	17,2	94454,6	1039,8	77	8548750,6	111602,0	7,7	25109,3	1881,5
33	3652523,0	110899,0	17,5	93414,8	1068,1	78	8660352,6	111609,7	7,2	23207,8	1888,5
34	3763422,0	110916,5	17,7	92346,7	1096,3	79	8771962,3	111616,9	6,5	21299,3	1895,3
35	3874338,5	110934,2	17,9	91250,4	1124,2	80	8883579,2	111623,4	5,8	19384,0	1901,1
36	3985272,7	110952,1	18,0	90126,2	1151,7	81	8995202,6	111629,2	5,3	17462,8	1906,6
37	4096224,8	110970,1	18,4	88974,5	1179,0	82	9106831,8	111634,5	4,6	15536,2	1911,5
38	4207194,9	110988,5	18,4	87795,5	1205,6	83	9218466,3	111639,1	3,9	13604,7	1916,1
39	4318183,4	111006,9	18,6	86589,9	1232,2	84	9330105,4	111643,0	3,3	11669,1	1919,3
40	4429190,3	111025,5	18,6	85357,7	1258,3	85	9441748,4	111646,3	2,7	9729,8	1922,4
41	4540215,8	111044,1	18,8	84099,4	1284,0	86	9553394,7	111649,0	2,0	7787,4	1924,8
42	4651259,9	111062,9	18,8	82815,4	1309,4	87	9665043,7	111651,0	1,3	5842,6	1926,5
43	4762322,8	111081,7	18,9	81506,0	1334,3	88	9776694,7	111652,3	0,7	3896,1	1927,6
44	4873404,5	111100,6		80171,7	1359,1	89	9888347,0	111653,0		1948,5	1928,5
45	4984505,1			78812,6		90	10000000,0			0000,0	

Remarques sur la formation de la Table XII précédente.

La seconde colonne de cette Table résulte de la dernière formule de l'article 181, et la 3e colonne se compose des différences premières des nombres de la colonne précédente. Ces différences peuvent s'obtenir directement par la formule de la page 295, ligne 19.

Les degrés des parallèles ont été calculés à l'aide d'une formule analogue à celle donnée à la fin de l'article 190, pour évaluer les grades de longitude, dans l'hypothèse de $\frac{1}{314}$ d'aplatissement.

N. B. M. Delambre a en outre publié, dans le 3e volume de la *Base du Système métrique*, une Table des arcs en toises, et des latitudes de leurs extrémités, à l'aide de laquelle on trouve la latitude des différens points de la méridienne de Dunkerque, et qui n'est assujétie à aucune hypothèse d'aplatissement, mais qui satisfait complètement à l'ensemble des observations, ainsi que je l'ai déjà dit à la suite de la Table des matières, page xx.

Afin de mieux fixer les idées à cet égard, reprenons la formule de l'article 177, exprimant une relation entre la longueur d'un arc et les latitudes de ses extrémités, savoir :

$$A = M(H'-H)\sin 1'' + N\sin(H'-H)\cos(H'+H) + P\sin 2(H'-H)\cos 2(H'+H) + Q\sin 3(H'-H)\cos 3(H'+H), + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

et supposons que les coefficiens M, N, P, Q.... qui sont des fonctions explicites des demi-axes de la terre, et de son aplatissement, dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, soient généralement des constantes inconnues qu'il faille déterminer par la condition que l'arc A et les latitudes H, H' de ses points extrêmes, aient précisément les valeurs données par les observations; on aura, en employant les quatre arcs mesurés en France et exprimés en toises (*voyez* pag. 244 du tom. II de cet Ouvrage), quatre équations entre M, N, P, Q, desquelles on tirera aisément

$$A = 3348538\sin 1''(H'-H) + 1218098\sin(H'-H)\cos(H'+H) + 41798\sin 2(H'-H)\cos 2(H'+H) + 141587{,}5\sin 3(H'-H)\cos 3(H'+H).$$

C'est précisément cette dernière formule, employée comme moyen d'interpolation, qui a servi à M. Delambre pour déterminer les positions géographiques des différens points de son grand réseau, et qui représente exactement les arcs terrestres et les latitudes; avantage qu'on n'obtiendrait pas, dit ce célèbre astronome, quelle que fût l'hypothèse d'aplatissement qu'on choisît. (*Base du Système métrique*, tom. III, pag. 96).

Supplément aux ERRATA *du* 1er *et du* 2e *volume.*

J'ai terminé le second volume de cet Ouvrage par un pareil Supplément; mais un nouvel examen du texte m'a fait encore découvrir quelques fautes d'impression que je signale ici, quoiqu'elles soient bien peu importantes.

TOME I.

Page 211, ligne 9 et 10 en remontant, $-dB''$, $-dB$, *lisez* $+dB''$, $+dB$

TOME II.

Page 60, ligne 8 en remontant, l'éclipse, *lisez* l'ellipse
97, 11, $\cos\frac{1}{2}(P+P)$, *lisez* $\cos\frac{1}{2}(P'+P)$
188, 3, $\cos(n-l'')$, *lisez* $\cos(n-l)$
ibid., 7 en remontant, C', *lisez* C
239, ligne dernière, des formules (l') (m'), *lisez* de la formule (l')
297, 6, $m\frac{ds^2}{dt}$, *lisez* $m\frac{ds}{dt^2}$

FIN DU TOME PREMIER.

AVIS AU RELIEUR.

Les Tables géodésiques, au nombre de 12, doivent être mises immédiatement à la suite du texte du 1er volume, et les Tables astronomiques, qui sont au nombre de 19, doivent être placées de même à la suite du texte du 2e volume.

Les planches, se composant de 11 pour le tome 1er, et de 2 pour le tome second, se mettent à la fin de chaque volume.

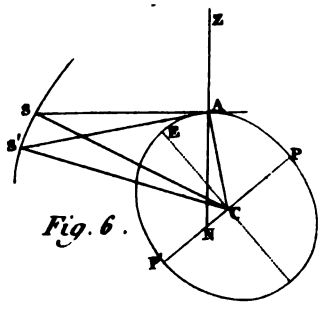


Fig. 6.

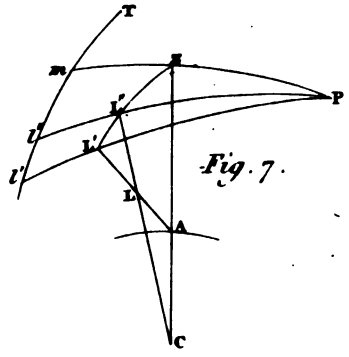
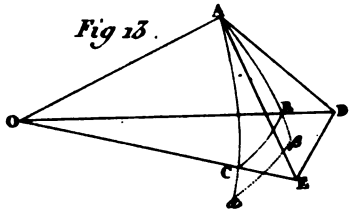


Fig. 7.

. 12.

Fig 13.



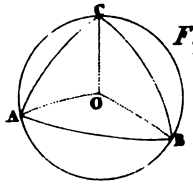


Fig. 14.

Fig 19.

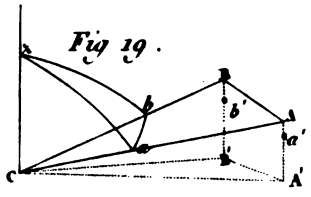


Fig. 20.

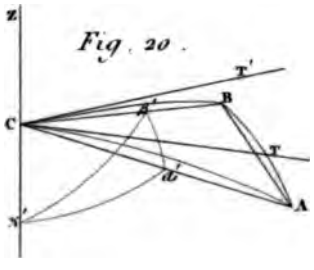
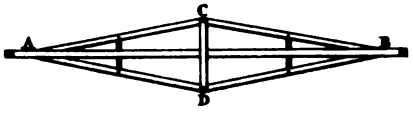


Fig. 26.

.25.



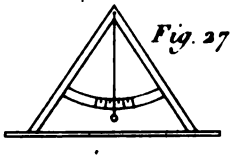
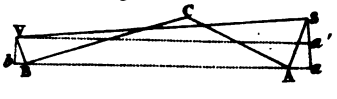


Fig. 27.

Fig. 30.



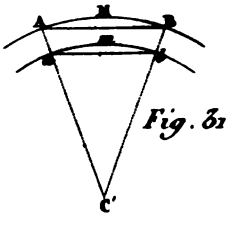


Fig. 31.

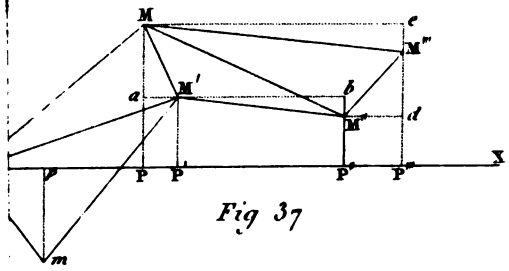


Fig 37

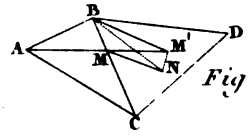


Fig. 38

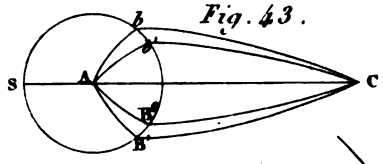


Fig. 43.

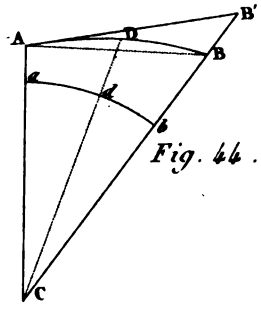


Fig. 44.

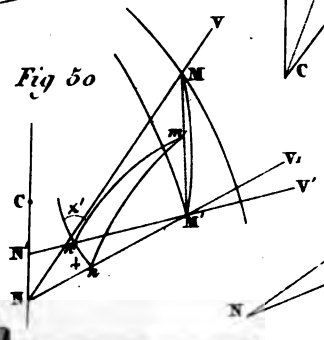


Fig 50

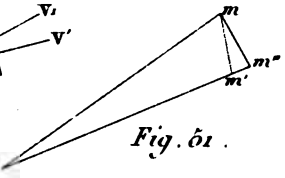
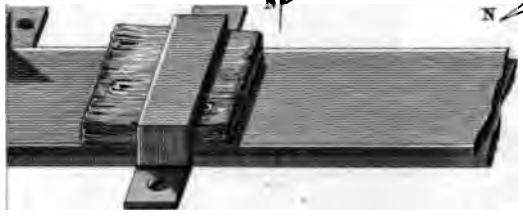


Fig. 51.



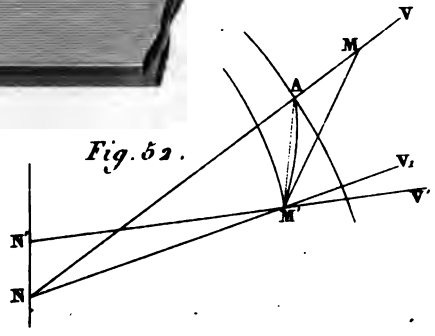
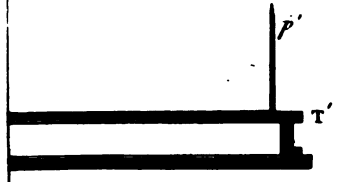


Fig. 52.



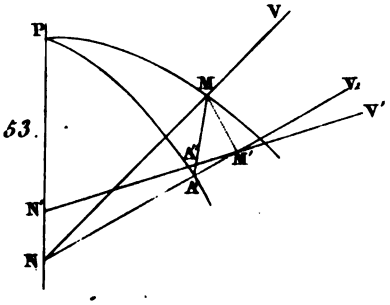
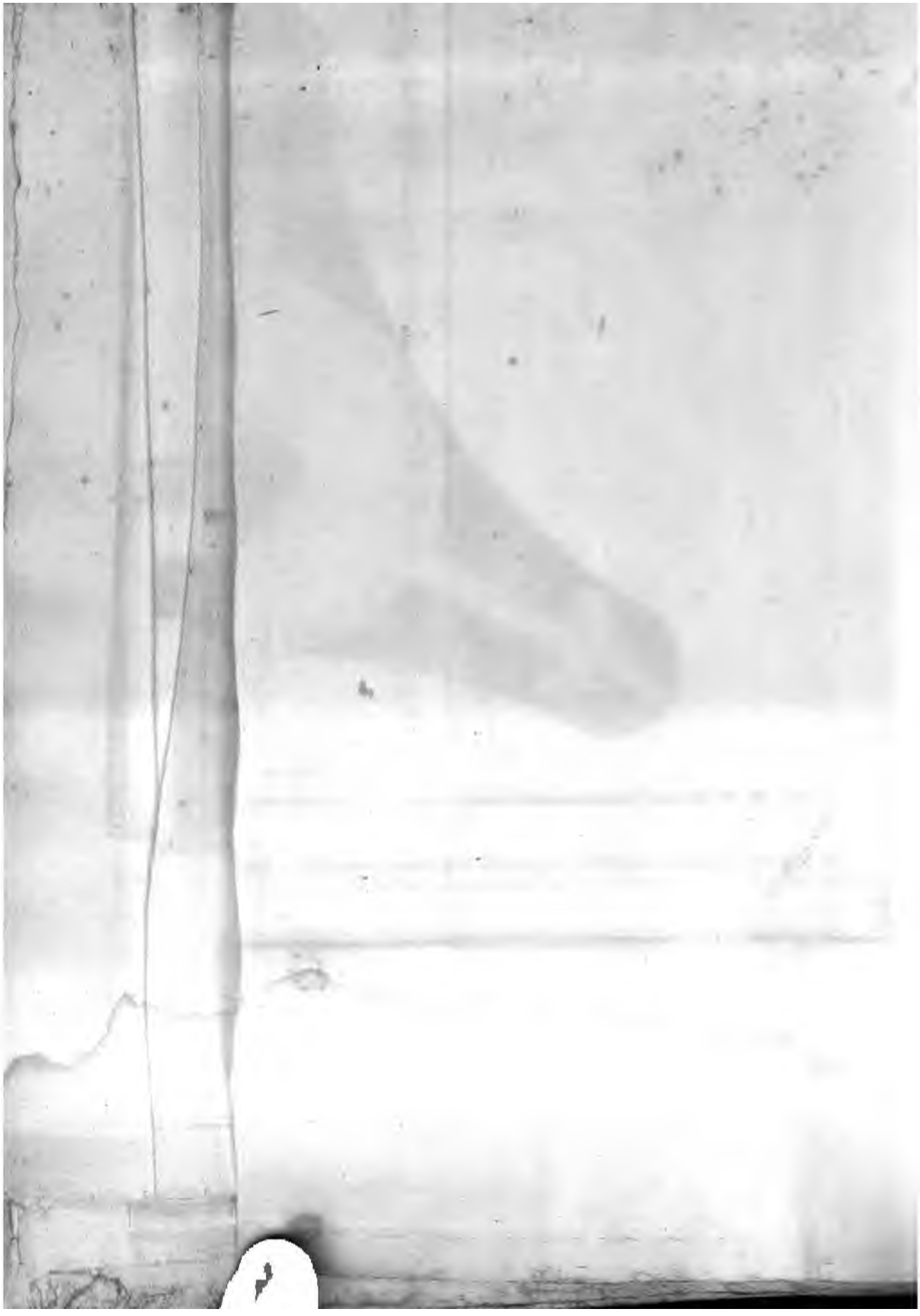
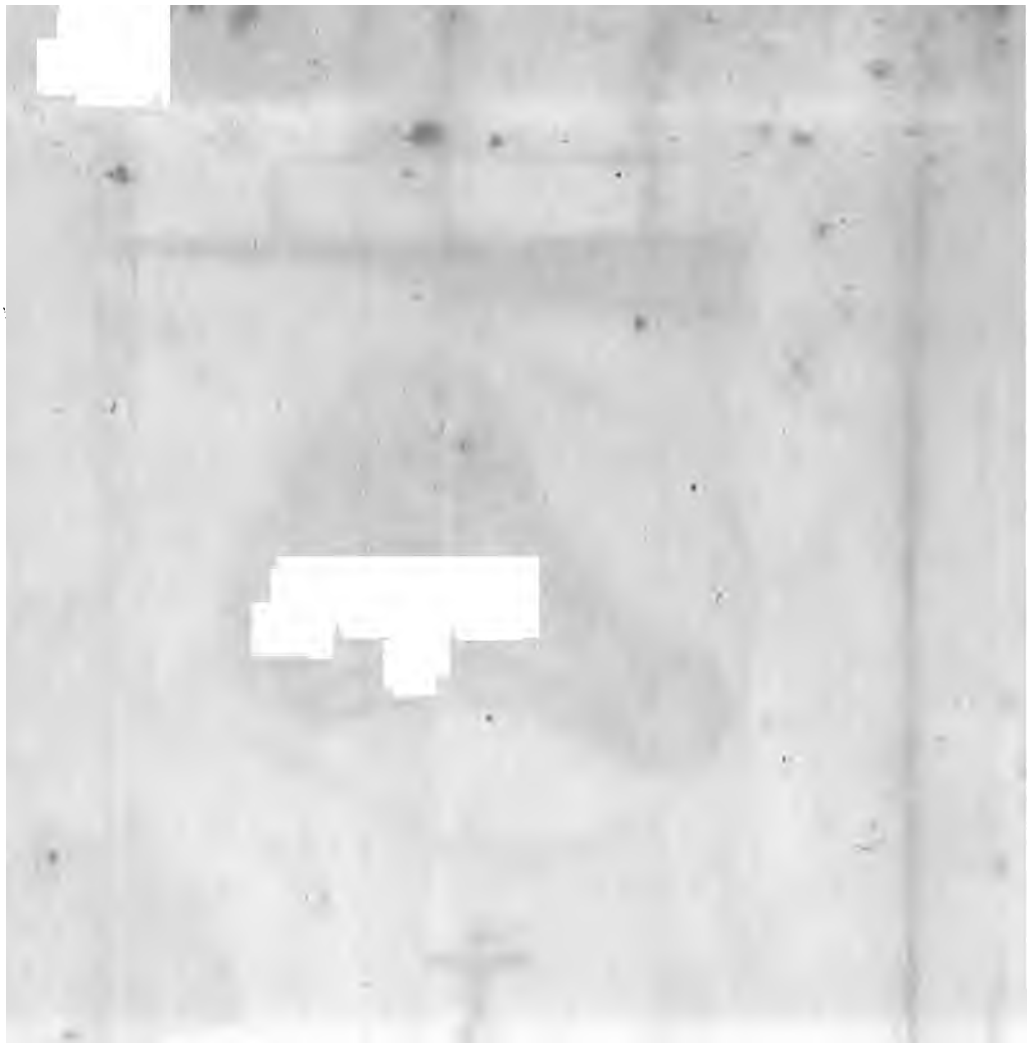
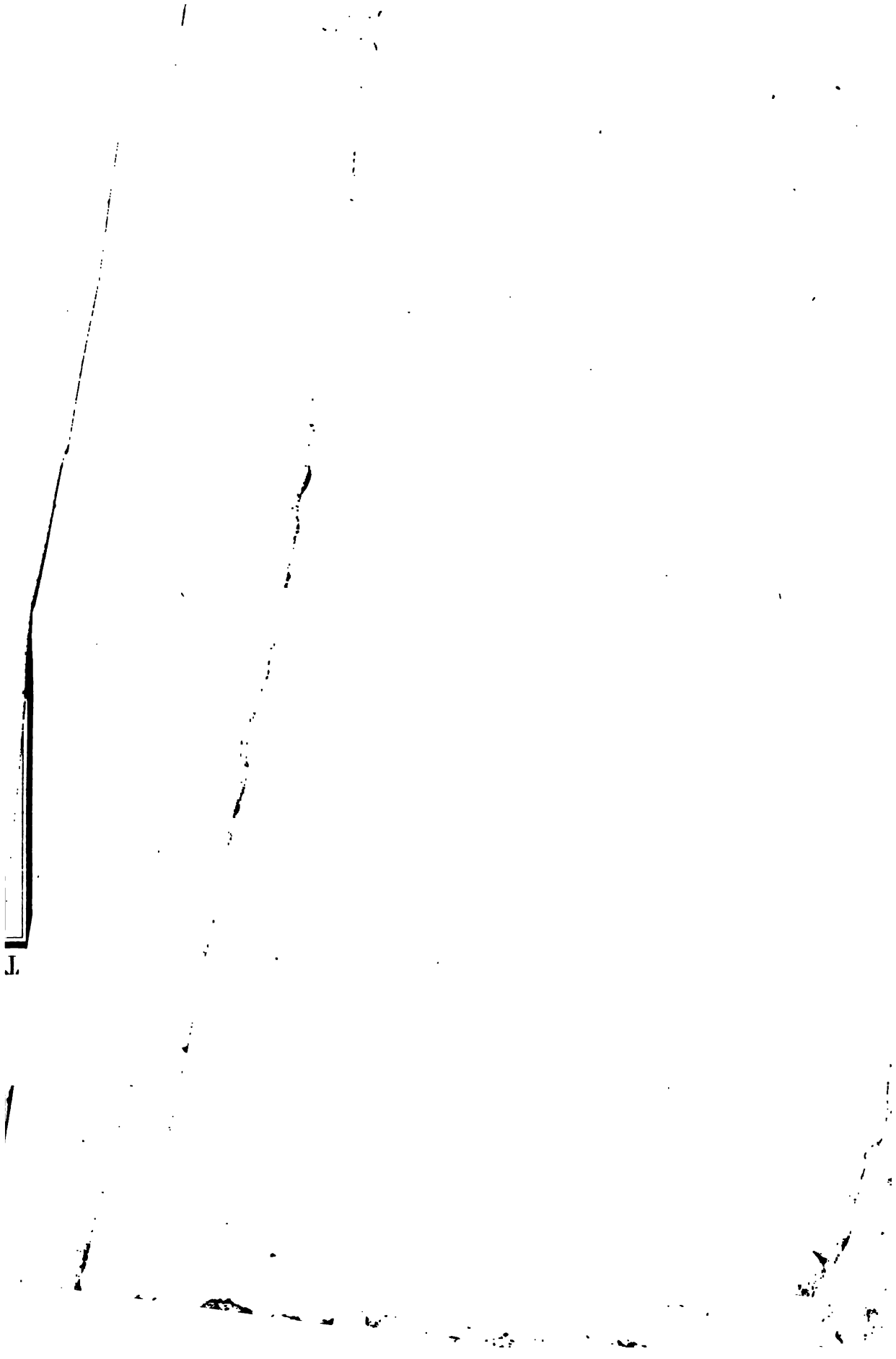



Fig. 53.